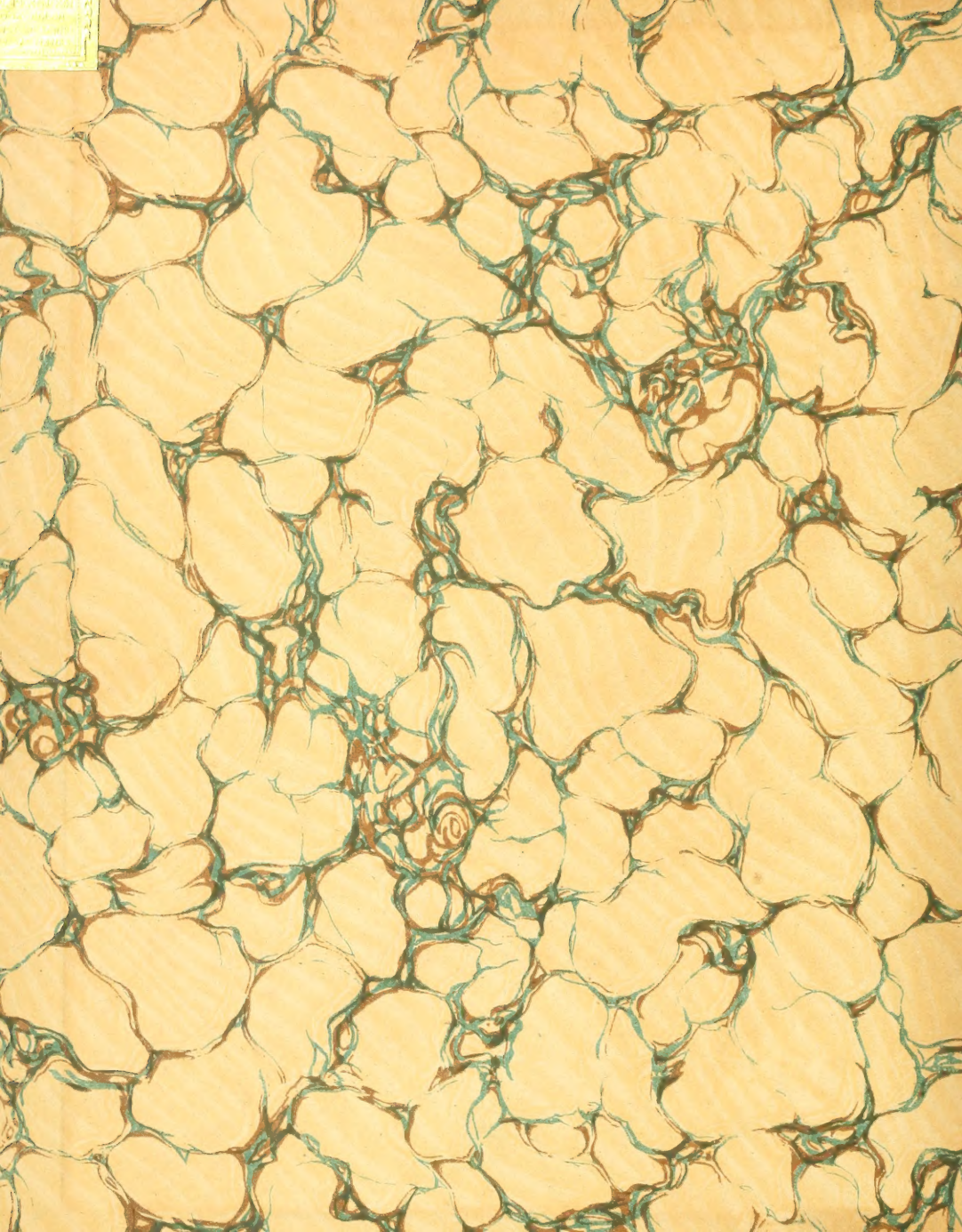
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01030001 0
A
71
35



N° D'ORDRE :
1156.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. H. DULAC,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Poitiers.

---

1re THÈSE. — RECHERCHES SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

**Soutenues le Juin 1903 devant la Commission d'Examen.**

---

MM. APPELL, *Président.*
POINCARÉ, PAINLEVÉ, } *Examinateurs*

1219 v-v
19/4/12

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

| | MM. | |
|---|---|---|
| **DOYEN** | PAUL APPELL | Mécanique rationnelle. |
| **DOYEN HONORAIRE** | GASTON DARBOUX | Géométrie supérieure. |
| **PROFESSEUR HONORAIRE** | L. TROOST. | |
| **PROFESSEURS** | LIPPMANN | Physique. |
| | BOUTY | Physique. |
| | DUCLAUX | Chimie biologique. |
| | BOUSSINESQ | Calcul des probabilités et Physique mathématique. |
| | PICARD | Analyse supérieure et Algèbre supérieure. |
| | H. POINCARÉ | Astronomie mathématique et Mécanique céleste. |
| | YVES DELAGE | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | GASTON BONNIER | Botanique. |
| | DASTRE | Physiologie. |
| | DITTE | Chimie. |
| | MUNIER-CHALMAS | Géologie. |
| | GIARD | Zoologie, Évolution des êtres organisés. |
| | WOLF | Astronomie physique. |
| | KOENIGS | Mécanique physique et expérimentale. |
| | VÉLAIN | Géographie physique. |
| | GOURSAT | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | CHATIN | Histologie. |
| | PELLAT | Physique. |
| | HALLER | Chimie organique. |
| | H. MOISSAN | Chimie. |
| | JOANNIS | Chimie (Ens^nt P.C.N.) |
| | P. JANET | Physique (Ens^nt P.C.N.). |
| | WALLERANT | Minéralogie. |
| | N. | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| **PROFESSEURS ADJOINTS** | PUISEUX | Mécanique et Astronomie. |
| | RIBAN | Chimie analytique. |
| | RAFFY | Éléments d'Analyse et de Mécanique. |
| | LEDUC | Physique. |
| | HAUG | Géologie. |
| | HADAMARD | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | ANDOYER | Astronomie mathématique et Mécanique céleste. |
| **SECRÉTAIRE** | A. GUILLET. | |

QA
371
D85

A Monsieur Paul PAINLEVÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

# PREMIÈRE THÈSE.

## RECHERCHES

SUR LES

# POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

## INTRODUCTION.

L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$(1) \qquad X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0,$$

dans le voisinage de valeurs $x_0$, $y_0$ (que l'on peut supposer nulles) et pour lesquelles X et Y sont holomorphes et s'annulent simultanément a fait l'objet de nombreux travaux, dont les premiers en date sont ceux de Briot et Bouquet [1]. Les travaux si remarquables et si profonds de MM. Picard [2] et Poincaré [3] ont ensuite élucidé complètement les difficultés que présente l'étude de ces intégrales, dans le cas, que l'on peut considérer comme le plus général, où, par un changement de variables, on peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$x(\ldots + \ldots)\,dy + (\ldots + \ldots)\,dx = 0,$$

(1) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1856.

(2) *Comptes rendus*, 1878, p. 1100, 7[illegible]5. *Bull. Soc. Math.*, 1881, p. 48.

(3) *Journ. Éc. Polyt.*, 1878. Thèse, 1879. *Journ. de Math.*, 1881, 1882, 1885.

en n'écrivant que les termes de moindre degré et désignant par $\lambda$ une constante qui n'est ni nulle ni négative, ni un entier ou l'inverse d'un entier. A la suite des deux illustres analystes déjà cités, MM. J. Bendixson [1], Horn [2], E. Lindelöff [3], Autonne [4] ont étudié le cas où $\lambda$ est un entier. M. Bendixson ([1]) a également étudié le cas où $\lambda$ est négatif. Tous ces travaux ne concernent que le cas où $x_0$, $y_0$ sont les coordonnées d'un point d'intersection simple des courbes $X = 0$, $Y = 0$. Dans le cas où ce point d'intersection est d'ordre quelconque, nous aurons à citer un Mémoire de M. Darboux ([5]) montrant comment on peut, dans certains cas, obtenir l'intégrale générale de (1), les travaux de M. Autonne ([4]) sur la recherche des intégrales algébroïdes et ceux de MM. Bendixson et Horn, qui ont étudié complètement, *dans le domaine réel*, les intégrales voisines de valeurs singulières. On doit également citer sur ces divers sujets les travaux remarquables de M. Königsberger ([6]). Malgré toutes ces recherches, de nombreux cas particuliers, présentant des difficultés spéciales, restent à étudier.

Ce travail est la première Partie d'une série de recherches sur l'étude, soit dans le champ réel, soit dans le champ complexe, des intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de valeurs singulières. L'équation sera supposée soit résolue par rapport à $y'$, soit algébroïde en $x$, $y$ et $y'$. Pour les valeurs singulières, $x_0$, $y_0$, considérées, $y'$ ou sera de la forme $\frac{0}{0}$, ou présentera des singularités algébriques, ne rentrant pas dans les cas classiques. J'ai énoncé les principaux résultats que j'ai obtenus dans cette étude, dans des Notes publiées dans les *Comptes rendus* ([7]). Ce travail est le développement des deux premières Notes. Je n'y considère que les singularités d'une équation résolue par rapport à $y'$ et ne m'occupe

([1]) *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, 1894, 1897. *Acta mathematica*, t. XXIV.
([2]) *Journal de Crelle*, 1895, 1896, 1898. *Math. Ann.*, 1898.
([3]) *Ofversigt af Finska Vetenskaps Societetens*, 1897.
([4]) *Annales de l'Université de Lyon*, 1891. *Journ. Ec. Polyt.*, 1897.
([5]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878.
([6]) *Lehrbuch der Analysis*.
([7]) 16 juillet 1899, 29 avril 1901, 13 mai 1901, 29 juillet 1901.

que de l'étude des intégrales dans le champ complexe, sans m'arrêter aux conclusions qu'on peut en tirer pour l'étude de ces intégrales dans le champ réel.

Avant de chercher dans quelle mesure on peut étendre au cas où les valeurs singulières, $x_0$, $y_0$, sont les coordonnées d'un point d'intersection d'ordre quelconque des courbes, $X = 0$, $Y = 0$, les résultats obtenus, dans le cas où l'on a un point d'intersection simple auquel cas l'équation (1) peut toujours se ramener à la forme

$$(2) \qquad x \frac{dy}{dx} - \lambda y - \ldots = 0,$$

j'ai tâché de compléter sur certains points l'étude de ce dernier cas. Par exemple, si $\lambda$ est réel et négatif (*col*) on sait, depuis bien longtemps, qu'il n'existe que deux courbes intégrales réelles passant par l'origine. En est-il de même dans le champ complexe? C'est une question qui restait en suspens et que les géomètres penchaient à trancher par l'affirmative [1]. Or, je prouve, au contraire, tout au moins dans le cas où $\lambda$ est rationnel, qu'il existe une infinité d'intégrales $y(x)$ s'annulant avec $x$ ($x$ tendant vers zéro suivant une loi convenable).

## PREMIÈRE PARTIE.

Dans la première Partie de ce Mémoire, j'examine le cas où, par un changement linéaire de variables, l'équation se ramène à la forme (2). On doit considérer les quatre cas suivants :

*Premier cas :* $\lambda$ n'est ni nul, ni négatif, ni entier, ni l'inverse d'un entier.

*Deuxième cas :* $\lambda$ est négatif.

*Troisième cas :* $\lambda$ est un entier ou l'inverse d'un entier.

*Quatrième cas :* $\lambda$ est nul.

PREMIER CAS. — *$\lambda$ n'est ni nul, ni négatif, ni entier ou l'inverse d'un entier.*

---

(1) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. [illegible]

L'intégrale générale donnée, dans ce cas, par M. Poincaré permet de faire l'étude complète des intégrales, dans le voisinage des valeurs singulières $x = y = 0$. Je montre que, exception faite du cas où $\lambda$ est positif, le point $x = 0$ est un point essentiel des intégrales $y(x)$ de l'équation. Je montre également qu'il n'y a pas lieu, dans le champ complexe, de faire une distinction entre le cas où la partie réelle de $\lambda$ est positive, et celui où elle est négative.

Deuxième cas. — *$\lambda$ est négatif.*

On peut toujours mettre l'équation sous la forme

$$x\,dy + y(\nu + \ldots)\,dx = 0,$$

$\nu$ étant positif. En cherchant à obtenir une intégrale générale de la forme

$$yx^{\nu}H(x, y) = \text{const.}$$

H étant holomorphe et non nul pour $x = y = 0$.

Je suis amené à considérer les cas suivants, pour lesquels je généralise les dénominations employées par M. Poincaré.

1° *$\nu$ est irrationnel.* On a un *col*. $H(x, y)$ existe formellement, mais est divergent, au moins dans certains cas. S'il y a des intégrales pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro, et si l'on désigne par $\omega$ et $\theta$ les arguments de $x$ et de $y$, quels que soient $m$ et $n$, $|x^m y^n \theta|$ et $|x^m y^n \omega|$ croissent indéfiniment. Je ne puis me prononcer sur l'existence de ces intégrales.

2° *$\nu$ est rationnel* $\left(\nu = \frac{p}{q}\right)$ et l'on est arrêté par une impossibilité dans la détermination du terme en $x^{pr}y^{qr}$ de $H(x, y)$. On a un *foyer*. Je mets en évidence une infinité d'intégrales pour lesquelles le module du rapport $y^{qr}x^{-pr}$ tend vers une limite qu'on peut choisir arbitrairement, ni nulle,

ni infinie. L'argument du produit $x^{p_0} y^{q_0}$ tend vers certaines limites déterminées.

3° *$\lambda$ est rationnel et* $H(x, y)$ *existe.* On a un *centre*. Je donne une nouvelle démonstration de la convergence de $h(x, y)$.

Troisième cas. — *$\lambda$ est de la forme $p$ ou $\frac{1}{p}$.*

Je montre par une methode nouvelle que l'intégrale générale de (1) peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi(x, y)}{|g(x, y)|^p} + a \log|g(x, y)| = \text{const.}$$

Quatrième cas. — *$\lambda$ est nul.*

Par un changement de variables je mets l'équation sous la forme

$$[mx(1 + ay^m) + x^2\varphi(x, y) + y^2 f(y)]\,dy + y^{m+1}\,dx = 0$$

où $m$ est un entier positif, $a$ une constante, $f$ et $\varphi$ des fonctions holomorphes et nulles pour les valeurs nulles des variables. Ce changement de variables permet de considérer *toutes* les intégrales dans le voisinage des valeurs singulières, ce que ne permettent pas les changements de variables employés dans ce cas par Briot et Bouquet. Si l'on désigne par $\theta$ l'argument de $y$, je montre que, si $y$ tend vers zéro en restant à l'intérieur d'un secteur pour lequel $\cos m\theta$ reste négatif, $x$ tend aussi vers zéro.

Dans tous les cas examinés dans cette première Partie, je dirai que l'on a un point singulier du premier ordre.

## DEUXIÈME PARTIE.

J'étudie le cas où les valeurs singulières $x = 0$, $y = 0$ correspondent

à un point d'intersection d'ordre quelconque des courbes $X = 0$ et $Y = 0$.

## I. — *Recherche d'une catégorie d'intégrales.*

Je me propose de rechercher des intégrales que j'appellerai *régulières*, et pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro et $\frac{y}{x^\mu}$ tend, quel que soit $\mu$, vers une limite finie ou infinie. Je ne puis mettre en évidence toutes les intégrales régulières de l'équation, néanmoins il résulte de la discussion faite pour rechercher ces intégrales, que l'on peut énoncer le théorème suivant :

*Si les termes de degré minimum de X et Y sont de degré n, et si l'on considère les intégrales pour lesquelles x et y tendent simultanément vers zéro, il y a, en général, x et y s'exprimant en fonction de t et de z, n + 1 intégrales ou groupes d'intégrales fournies par des équations de la forme*

$$t\,dz + (-\lambda z + \ldots)\,dt = 0,$$

*où λ n'est pas nul. S'il n'en est pas ainsi, il y a une infinité d'intégrales fournies par des équations d'autre forme.*

## II. — *Recherche dans certains cas de l'intégrale générale.*

Je recherche si l'intégrale générale de l'équation (1) ne peut pas se mettre sous la forme

$$e^{h(x,y)} A_0^{\lambda_0} A_1^{\lambda_1} \ldots A_n^{\lambda_n} = \text{const.},$$

les λ étant des constantes, les A des fonctions holomorphes et nulles pour $x = y = 0$, $h(x, y)$ un développement suivant les puissances de $x$ et de $y$. On pourra toujours déterminer les valeurs possibles des exposants λ; mais, en général, on rencontrera des impossibilités dans la détermination des termes de $h$. S'il n'en est pas ainsi et si les rapports des λ

ne sont pas tous positifs, on peut affirmer la convergence du développement $h(x, y)$ obtenu.

Le cas où les rapports de tous les $\lambda$ sont positifs est tout à fait analogue au deuxième cas de la première Partie ($\lambda$ négatif). Il comprend les sous-cas suivants :

1° $h(x, y)$ *ne peut être déterminé.* C'est le cas d'un foyer, mais c'est ici le cas général. Je montre qu'il y a une infinité d'intégrales pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro.

2° $h(x, y)$ *existe formellement,* mais les rapports des $\lambda$ ne sont pas tous rationnels. C'est le cas d'un col. Suivant le cas $h(x, y)$ est convergent ou divergent. Je ne puis me prononcer sur l'existence d'intégrales passant par l'origine, autres que celles obtenues en égalant à zéro les A.

3° $h(x, y)$ *existe formellement* et les rapports des $\lambda$ sont tous rationnels. C'est le cas d'un centre. $h(x, y)$ est convergent.

De toute la discussion faite dans cette seconde Partie, je puis conclure que, sauf les deux cas signalés en dernier lieu (col et centre) on peut toujours affirmer l'existence, pour l'équation (1), d'une infinité d'intégrales pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro. On a donc les mêmes conclusions, que le point singulier soit du premier ordre ou non.

## PREMIÈRE PARTIE.

**1.** Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad (ax + by + \ldots)\,dy + (a'x + b'y + \ldots)\,dx = 0,$$

où les parenthèses sont holomorphes et nulles pour $x = y = 0$ et dont l'une au moins contient des termes du premier degré, je me propose de classer les différents cas que l'on peut obtenir. Je considère l'équation obtenue en ne conservant que ces termes du premier degré, et je pose

$$Q = (ax + by)\,y + (a'x + b'y)\,x, \qquad P = (ax + by)\,dy + (a'x + b'y)\,dx;$$

j'établis les cas suivants :

1° Q est un produit de deux facteurs distincts $\alpha x + \beta y$, $\alpha' x + \beta' y$ et la forme bilinéaire P, en $x$ et $y$ d'une part et $dx$ et $dy$ d'autre part, n'est pas un produit de deux facteurs. En posant

$$y_1 = \alpha x + \beta y, \qquad x_1 = \alpha' x + \beta' y.$$

P et Q deviennent

$$(2) \qquad \begin{cases} Q_1 = (a_1 x_1 + b_1 y_1)\,y_1 + (a'_1 x_1 + b'_1 y_1)\,x_1, \\ P_1 = (a_1 x_1 + b_1 y_1)\,dy_1 + (a'_1 x_1 + b'_1 y_1)\,dx_1. \end{cases}$$

On a par suite $b_1 = a'_1 = 0$ puisque $Q_1 = x_1 y_1$ et l'on a $a_1 b'_1 \neq 0$, puisque $P_1$ n'est pas un produit de deux facteurs. Il en résulte qu'en faisant pour l'équation (1) le changement de variables indiqué et supprimant les indices, l'équation devient

$$(3) \qquad (x + \ldots)\,dy + (-\lambda y + \ldots)\,dx = 0;$$

2° Q est un carré $(\alpha x + \beta y)^2$, P n'est pas un produit de deux facteurs.

En posant

$$x_1 = \alpha x + \beta y, \qquad y_1 = y,$$

et se reportant aux égalités (2), on voit que l'on a $b_1 = 0$, $a_1 + b_1 = 0$, puisque $Q_1 = x_1^2$ et $a_1 \neq 0$ puisque $P_1$ n'est pas un produit. L'équation (1) peut se ramener à la forme

$$(4) \qquad (x + \ldots)\, dy + (-y + ax + \ldots)\, dx = 0;$$

3° Q est identiquement nul, on a $b + a' = 0$, $a + b' = 0$; on a par suite la forme (4) avec $a = 0$;

4° Q n'est pas un carré, P est un produit de deux facteurs. En se reportant à 1°, on voit que l'on aura $b_1 = a'_1 = 0$, mais ici $P_1$ devant être un produit de deux facteurs, un des deux nombres $a_1$ ou $b'_1$ sera nul. L'équation devient

$$(x + \ldots)\, dy + (ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots)\, dx = 0;$$

5° Q est un carré. P est un produit de deux facteurs, en se reportant à 2° on voit que l'on aura $b_1 = 0$, $a_1 + b'_1 = 0$, $a_1 = 0$. En supprimant les indices et changeant le rôle des variables, l'équation devient

$$(5) \qquad (y + \ldots)\, dy + (ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots)\, dx = 0.$$

2. Si, pour classer les différentes équations du type (1), on considère, comme d'habitude, l'équation

$$b + \lambda(a' + \lambda b) + ab' = 0,$$

la quantité désignée précédemment par $\lambda$ est le rapport de deux racines de cette équation.

Les trois premiers cas que je considère correspondent donc à $\lambda \neq 0$, le quatrième à $\lambda = 0$. On sait que $\lambda \neq 0$ se subdivise en deux cas :

1° $\lambda$ n'est ni négatif ni un entier positif ou l'inverse d'un entier ;

2° $\lambda$ est négatif.

Nous considérerons, en même temps que le cas de l'équation (1), le cas où $\lambda$ est de la forme $p$ ou $p^{-1}$ ($p$ entier). On peut toujours supposer $\lambda = p$, en changeant le rôle de $x$ et de $y$.

L'étude de l'équation (5), qui correspond du reste au cas où les deux courbes obtenues en égalant à zéro le coefficient de $dx$ et le coefficient de $dy$ ont $x = y = 0$ comme point d'intersection d'ordre supérieur au premier, résultera des théories développées dans la seconde Partie. Je me propose de développer dans un autre travail les résultats que j'ai obtenus pour cette équation.

La première Partie comprendra donc les subdivisions suivantes :

1° $\lambda$ n'est ni négatif, ni un entier ou l'inverse d'un entier positif ;

2° $\lambda$ est négatif ;

3° $\lambda$ est un entier positif ;

4° $\lambda = 0$. L'équation se ramène à la forme (5).

Premier cas. — *$\lambda$ n'est ni négatif, ni un entier positif.*

**3.** En employant, par exemple, la forme $AB^{-\lambda} =$ constante de l'intégrale générale de (1) qui nous fournit toutes les intégrales pour lesquelles $x$ et $y$ prennent des valeurs voisines de 0, on voit que le changement de variables

$$(6) \qquad Y = A, \qquad X = B$$

permet de mettre l'équation sous la forme

$$(7) \qquad X\,dY - \lambda Y\,dX = 0.$$

Pour étudier dans le champ des variables complexes $x$ et $y$ et dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, les intégrales de (1), étudions les intégrales de l'équation réduite.

Ces intégrales s'expriment par

$$(8) \qquad X = c'e^{t}, \qquad Y = ce^{\lambda t}.$$

$t$ étant une variable complexe et $\lambda$ pouvant être imaginaire; on a

$$t = u - iv, \qquad \lambda = \alpha - i\beta, \qquad X = c'e^{t},$$

$$Y = ce^{\alpha u - \beta v} e^{i(\alpha v + \beta u)}, \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{\lambda Y}{X} = \frac{\lambda c}{c'} e^{\alpha u - \beta v} e^{i(\alpha v + \beta u)}.$$

Les constantes $c$ et $c'$ pourront être négligées dans l'étude qui va suivre de la variation du module et de la variation de l'argument de X et $\lambda$. On peut toujours supposer $\beta$ positif: si $\beta$ était négatif, on changerait $v$ en $-v$, $i$ en $-i$.

Traçons deux axes de coordonnées O$u$ et O$v$ et figurons le point M d'affixe $t = u + iv$. Figurons la droite AA′ ayant pour équation $\alpha u - \beta v = 0$. On a les deux dispositions suivantes :

Fig. 1.

Pour que X et Y tendent simultanément vers 0, il faut que $u$ et $\alpha u - \beta v$ croissent indéfiniment par valeurs négatives. Il faudra donc que le point M s'éloigne indéfiniment dans l'angle $v$OA. Le point doit s'éloigner sur une

branche de courbe n'ayant pas d'asymptote parallèle, soit à OA, soit à Ov. Il résulte de là que, si l'on considère Y comme une fonction de X, si X tend vers o d'une façon quelconque, Y pourra ne pas tendre vers o.

Montrons qu'en général, pour les intégrales pour lesquelles X et Y tendent vers o, l'argument de X et celui de Y augmentent indéfiniment. Ces arguments sont proportionnels aux distances du point M $(u, v)$ aux droites $v = 0$, droite $Ou$, et $\alpha v + \beta u = 0$, droite OB. Ces droites sont perpendiculaires aux deux côtés de l'angle $AOv$. Donc si $\alpha$ est négatif, ces droites étant extérieures à l'angle, les deux arguments de X et Y croîtront indéfiniment. Il en est de même pour $\alpha = 0$. Si $\alpha$ est positif, on pourra faire éloigner M de telle manière qu'un des arguments reste fini, l'autre croîtra indéfiniment.

Étudions $\frac{Y}{X}$ toujours pour les intégrales tendant vers l'origine.

Le module de cette quantité est proportionnel à $e^{(\alpha-1)u+\beta v}$ et l'argument égal, à une constante près, à $(\alpha - 1)v + \beta u$. Traçons la droite $(\alpha - 1)u - \beta v = 0$, droite (C) dont la partie OC est située dans l'angle $vOA$ et la droite (D), $(\alpha - 1)v + \beta u = 0$, qui lui est perpendiculaire. Cette droite aura une portion située dans l'angle $vOA$, si l'on a $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha) > 0$.

Il résulte de là que, si M s'éloigne indéfiniment dans l'angle $vOC$, sans être sur une branche de courbe ayant une asymptote parallèle à OC, le module de $\frac{Y}{X}$ tend vers zéro. Il croît indéfiniment si M s'éloigne dans les mêmes conditions dans l'angle AOC.

Si la condition $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha) > 0$ est satisfaite, l'argument de $\frac{Y}{X}$ restera fini, pour M s'éloignant sur une branche de courbe à asymptote parallèle à OD et sera infini dans tous les autres cas. En particulier, si le module tend vers une limite finie, l'argument deviendra infini.

4. On doit remarquer que, en désignant toujours par le mot *intégrale d'une équation différentielle* un ensemble de valeurs complexes de $x$ et

de $y$ satisfaisant à cette équation, on peut employer ce mot avec deux sens différents. On peut considérer un ensemble de valeurs de $x$ et de $y$ dépendant d'un paramètre réel variable. C'est ce qui a toujours lieu dans le champ réel. On peut encore considérer un ensemble dépendant de deux paramètres arbitraires. C'est ce qui a lieu dans le champ complexe, lorsque, partant de valeurs initiales $x_0, y_0$, on fait varier $x$. Si la confusion des deux notions ne présente aucun inconvénient dans le voisinage des points algébriques de l'équation, elle me paraît en présenter dans le voisinage des points singuliers. Lorsque je considérerai un ensemble de valeurs de $x$ et de $y$ dépendant d'un paramètre et satisfaisant à l'équation, je dirai que j'ai une *caractéristique* de l'équation. Je réserverai, en général, le mot d'*intégrale* au cas où une des variables, $x$ par exemple, pourra prendre toutes les valeurs voisines d'une valeur initiale $x_0$.

Nous pourrons dire que l'équation différentielle, considérée en X et Y, a une infinité de caractéristiques passant par l'origine, mais qu'elle n'a pas d'intégrale passant par l'origine, en entendant par là que Y ne tend pas vers zéro, quelle que soit la façon dont X tend vers zéro.

3. Si l'on revient maintenant aux variables primitives, les relations (6) peuvent s'écrire

$$(9)\quad \begin{cases} X = a_1 x[1 + f_1(x)] + b_1 y^p[1 + F_1(x, y)], \\ Y = a_1 y[1 + \varphi_1(y)] + b_1 x^q[1 + \Phi_1(x, y)], \end{cases}$$

$a_1$, $b_1$, $a'_1$, $b'_1$, étant des constantes, $f_1$, $F_1$, $C_1$, $F_1$ des fonctions holomorphes et nulles pour les valeurs zéro des variables; $p$ et $q$ peuvent être égaux à un; $b_1$ et $b'_1$ être nuls. On en conclut, en donnant aux lettres la même signification

$$(10)\quad \begin{cases} y = a'Y[1 + \varphi(Y)] + b'X^q[1 + \Phi(X, Y)], \\ x = aX[1 + f(X)] + bY^p[1 + F(X, Y)]. \end{cases}$$

Comme on peut multiplier X et Y par des constantes quelconques, nous pouvons supposer $a = a' = 1$.

Pour que $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro, il faut et il suffit que X et Y tendent vers zéro. Les formules (9) et (10) montrent également que, si $\frac{Y}{X}$ tend vers une limite, il en est de même de $\frac{y}{x}$ et réciproquement. Il ne peut y avoir doute que dans le cas où $p = q = 1$; mais en remarquant que les quantités $ab' - ba'$, $a_1 b_1 - b_1 a_1$ ne sont pas nulles, on voit immédiatement que la propriété est encore vraie.

Remplaçons dans (10) X et Y par leurs valeurs. On a, en faisant $c' = 1$,

$$(10') \quad \begin{cases} x = e^{u} e^{iv}(1 + f) + b e^{p} e^{p(\alpha u - \beta v)} e^{ip(\alpha v + \beta u)}(1 + F), \\ y = c e^{\alpha u - \beta v} e^{i(\alpha v + \beta u)}(1 + \varphi) + b' e^{qu} e^{iqv}(1 + \Phi). \end{cases}$$

Les développements (9) et (10) ne sont valables que pour des valeurs suffisamment petites de $x, y, X, Y$. Il résulte que les formules (11) ne seront valables que pour les valeurs de $u$ et de $v$ coordonnées d'un point M d'un certain domaine compris dans l'angle (OA. Nous supposerons de plus ce domaine déterminé de telle façon, que $x$ et $y$ prennent des valeurs pour lesquelles les formules (9) sont valables. Ce domaine que nous appellerons domaine du point M pourra toujours être supposé limité par deux parallèles à O$u$ et à OA. Ce domaine change avec les constantes $c$ et $c'$. Dans ce qui suit, nous considérerons une intégrale déterminée, mais nous pourrions considérer toutes les intégrales pour lesquelles $c$ est inférieur à un et $c' = 1$, en n'employant que la partie commune aux domaines relatifs à ces diverses intégrales. En faisant $c = 1$ dans les formules (8) et $|c'| < 1$ on aurait les mêmes conclusions pour toutes les autres intégrales.

6. Étudions les arguments de $x$ et de $y$ donnés par (10') lorsque ces quantités tendent vers zéro. Montrons qu'aux caractéristiques (X, Y) pour lesquelles X et Y gardent un argument fini, correspondent, si certaines conditions d'inégalité sont vérifiées, des caractéristiques pour

lesquelles $x$ et $y$ gardent un argument fini. On peut écrire

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha u} e^{\beta v} \left[ 1 + f + b^p e^{p(\alpha u + \beta v)} e^{p(\alpha u + \beta v)} (1 + F) \right] \\ &= X \left[ 1 + f + bc^p \frac{Y^p}{X} (1 + F) \right]. \end{aligned}$$

De même que $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y^p}{X}$ peut tendre vers zéro, vers l'infini, ou ne tendre vers aucune limite suivant que la distance du point M $(u, v)$ à la droite $(p\alpha - 1)u - p\beta v$ devient infinie par valeurs négatives, positives ou reste finie.

Une portion indéfinie de cette droite est du reste située dans le domaine du point M et divise ce domaine en deux régions. Supposons que le point M s'éloigne sur une courbe à asymptote parallèle à $Ou$, $\alpha$ étant positif.

Si la direction $Ou$ est dans la région pour laquelle $\frac{Y}{X}$ tend vers zéro, c'est-à-dire si l'on a $p\alpha - 1 < 0$, l'argument de $x$ tendra à ne différer que d'une quantité constante de l'argument de X et restera donc fini.

On verra qu'en même temps la condition $\alpha - q < 0$ étant vérifiée, l'argument de $y$ restera aussi fini.

On peut montrer qu'il en sera encore ainsi pour $p\alpha = 1$.

On trouverait de même, sans difficulté, l'inégalité qui doit être vérifiée pour que, l'argument de Y restant fini, les arguments de $x$ et $y$ restent finis.

**7.** Cherchons si, les arguments de X et de Y croissant indéfiniment, l'argument de $x$ restera fini. Il est évident que, si $b$ est nul, l'argument de $x$ ne peut, dans ces conditions, rester fini; de même l'argument de $y$, si $b'$ est nul. Je vais montrer que, si l'on n'a pas $p = q = 1$, l'argument de $x$ ou de $y$ croît indéfiniment si X et Y tendent vers zéro et si leurs arguments croissent indéfiniment.

Posons $bc^p = m + ni$. Si la quantité $e^{p(\alpha u - \beta v) - u + m} \frac{1 + F}{1 + f}$ est constamment

inférieure à un, l'argument de $x$ croîtra indéfiniment comme $v$. De même, si cette quantité est toujours supérieure à un, l'argument de $x$ croîtra indéfiniment comme $p(\alpha v + \beta u)$. Il est possible de déterminer deux droites

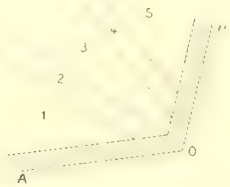
$$\alpha p - 1 \quad u - \beta p v + m = \pm h$$

divisant le domaine du point M en trois régions. Dans la région supérieure la quantité considérée sera inférieure à un. Ce sera le contraire dans la région inférieure. Dans la région comprise entre les deux parallèles, il y aura doute. Par suite, pour M s'éloignant indéfiniment dans la région située au-dessous des deux parallèles, l'argument de $x$ croîtra comme $p(\alpha v + \beta u)$.

Les mêmes considérations s'appliquent à l'argument de $y$. Deux parallèles à la droite $(\alpha - q)\, u - \beta v = 0$ déterminent trois régions. Dans la région située au-dessus des deux parallèles l'argument de $y$ croîtra indéfiniment comme $qv$. Les deux couples de parallèles sont respectivement parallèles à des directions $\Delta$ et $\Delta'$ situées dans l'angle $v$OA.

Comme on n'a pas $p = q = 1$, les deux directions $\Delta$ et $\Delta'$ sont distinctes et $\Delta'$ est au-dessous de $\Delta$. On a donc cinq régions déterminées dans le domaine de M. Dans le cas de $\alpha > 0$ on a la disposition suivante :

Fig. 6.




Pour que les arguments de $x$ et de $y$ ne croissent pas indéfiniment, il faut que le point M $(u, v)$ s'éloigne indéfiniment suivant une courbe allant une infinité de fois dans la région (2) et une infinité de fois dans la région (4). Même dans ces conditions ces arguments croîtront indéfiniment.

En effet, pour passer de (2) à (4), M devra traverser (3), et dans cette région l'argument de $x$ croîtra comme $p(\alpha v - \beta u)$, et celui de $y$ comme $v$. Ces quantités étant proportionnelles aux distances de M à des perpendiculaires à OA et à O$v$, l'une au moins croîtra d'une quantité aussi grande que l'on voudra, pourvu que M soit suffisamment éloigné de O. Il est donc impossible que les deux arguments restent inférieurs, en valeur absolue, à une limite fixe K. Si les deux arguments sont inférieurs à K, par exemple pour M situé dans (2), un des arguments dépassera K lorsque M ira dans (3). *Un des deux arguments de $x$ et de $y$ croîtra indéfiniment.*

Si au contraire $p = q = 1$, les arguments de $x$ et de $y$ peuvent rester finis; on peut les faire osciller autour de n'importe quelles valeurs. En effet, les formules (10') définissent $x$ et $y$ comme fonctions analytiques de $t = u + iv$. La fonction $x$, par exemple, admet une infinité de zéros qui sont voisins pour $|t|$ suffisamment grand des zéros de $e^t + bc^p e^{\lambda t}$. Tous ces zéros tendent à être situés sur une droite dont une portion indéfinie est dans le domaine du point M. De même une infinité de zéros de $y$ sont sensiblement situés sur une droite qui est parallèle à la première. On pourra dès lors aller d'un zéro de $x$ à un zéro de $y$, en ne faisant varier $u$ et $v$ que d'une quantité finie.

Si nous voulons faire osciller les arguments de $x$ et de $y$ autour de valeurs arbitraires $\omega$ et $\theta$, nous ferons éloigner le point M indéfiniment en le faisant tourner dans un sens convenable autour d'un zéro de $x$, lorsque l'argument de $x$ différera de $\omega$ d'une quantité supérieure en valeur absolue à $2\pi$; nous ferons ensuite, s'il y a lieu, tourner M autour d'un zéro de $y$ de manière à réduire la différence entre $\theta$ et l'argument de $y$ à une valeur inférieure à $2\pi$. En allant d'un zéro de $x$ à un zéro de $y$, chacun des arguments ne variera que d'une quantité dont il serait facile de calculer une limite supérieure $k$. L'oscillation des arguments, de part et d'autre de $\omega$ et de $\theta$, sera au plus $k + 2\pi$.

8. Tirons de ce qui précède quelques conclusions relatives à la nature de la singularité que présentent, pour $x = 0$, les intégrales $y$ de l'équation

considérées comme fonction de $x$. D'après ce qui a été dit au sujet de X et de Y, il paraît vraisemblable que si $x$ tend vers zéro d'une façon quelconque, $y$ peut tendre vers zéro ou non, et que par suite le point $x = 0$ est un point essentiel d'une intégrale $y$ considérée comme fonction de $x$. Montrons qu'il en est bien ainsi. Bien entendu, les intégrales obtenues en faisant $c = 0$ ou $c' = 0$ échappent au raisonnement qui suit.

Tout d'abord, si dans (10) on a $b = 0$, c'est-à-dire si l'équation (1) admet l'intégrale $x = 0$, X, et par suite $x$, pourra tendre vers zéro sans que Y, et par suite $y$, tende vers zéro. Si au contraire on a $b \neq 0$, la fonction $x$ de $u + iv$, ainsi que nous l'avons dit, admet une infinité de zéros, qui sont distincts des zéros de $y$. Donc si l'on fait tendre $u + iv$ vers un de ces zéros de $x$, et cela d'une façon quelconque, $y$ ne tendra pas vers zéro [1]. L'étude de la variation des arguments de $x$ et de $y$ nous fournit des propriétés du point essentiel que nous rencontrons. On peut encore établir les propriétés suivantes.

Si l'équation (1) n'admet pas l'intégrale $x = 0$, une intégrale, autre que les deux intégrales algébroïdes, a dans le voisinage de $x = 0$ une infinité de points critiques algébriques (on considère $y$ comme fonction de $x$). En effet, pour une infinité de valeurs de $t$, la dérivée de $x$, par rapport à $t$, est nulle. On voit facilement que ces zéros sont situés dans le domaine du point M. Les valeurs de $x$ correspondant à ces zéros seront des points critiques de $t$, considéré comme fonction de $x$ et par suite de $y$.

Si l'équation (1) admet l'intégrale $x = 0$, on peut ramener la formule à $x = X = e^t$, on voit que $t$, et par suite $y$, considérés comme fonction de $x$, ne présenteront pas de points critiques dans le voisinage de $x = 0$. Mais $x = 0$ est un point critique de $y$. En effet, si $x$ tourne autour de l'origine, $t$ croît de $2\pi i$ et $y$ ne reprendra pas la même valeur.

On peut remarquer que si l'équation (1) n'admet pas l'intégrale $x = 0$,

[1] $x = 0$ étant un point essentiel, on voit qu'on ne peut dire qu'il suffit de prendre des valeurs initiales, $x_0$, $y_0$, suffisamment petites, pour avoir une intégrale prenant pour $x$ voisin de zéro des valeurs $y$ voisines de zéro. Quelle que soit l'intégrale, on peut faire tendre $x$ vers zéro, de telle manière que $y$ ne tende pas vers zéro.

en faisant tourner $t$ autour d'un des zéros de $c$, on fait décrire à $c$, autour de l'origine, un contour tel que $y$ reprenne la même valeur.

En résumé, on peut dire, dans tous les cas, que $x = 0$ est un point essentiel des intégrales, autres que les deux intégrales algébroïdes. Il y a toujours une infinité de caractéristiques par lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro. Parmi ces caractéristiques, il peut y en avoir une infinité pour lesquelles les arguments de $x$ et de $y$ restent simultanément finis, ou il peut ne pas y en avoir, suivant que des conditions d'inégalité entre la partie réelle et la partie imaginaire de $\lambda$ sont vérifiées ou non. Si l'équation admet l'intégrale $x = 0$, $x = 0$ est un point critique de $y$. Il n'y a pas d'autres points singuliers de $y$ dans le voisinage de $x = 0$.

Si l'équation n'admet pas l'intégrale $x = 0$, toute intégrale autre que les deux intégrales algébroïdes admet une infinité de points critiques dans le voisinage de $x = 0$. On pourra, dans certains cas ($p = q = 1$), trouver une nouvelle série de caractéristiques telles que $x$ et $y$ tendent vers zéro avec des arguments finis.

Dans tout ce qui précède on a supposé $\beta \neq 0$ ($\lambda = \alpha + i\beta$). Si $\lambda$ était réel les propriétés des intégrales seraient différentes. Elles sont du reste évidentes. Toutes les intégrales $y$ tendent vers zéro avec $x$.

9. D'après ce qui précède, il ne me paraît pas justifié d'établir, lorsqu'on étudie les intégrales dans le champ complexe, une distinction entre le cas où $\lambda$ a sa partie réelle positive et le cas où cette partie est négative, ainsi que l'avaient fait Briot et Bouquet. En effet, si l'on étudie l'équation réduite (7), ou l'équation donnée, dans le cas où elle admet les intégrales $x = 0$ et $y = 0$, il ne me paraît pas qu'il y ait lieu, dans le cas où cette partie réelle est positive, d'insister sur le fait qu'on peut faire tendre $x$ et $y$ vers zéro, l'argument de $x$ restant fini, puisque dans ces conditions l'argument de $y$ croît indéfiniment. D'autre part, si l'équation donnée (1) n'admet pas les intégrales $x = 0$ et $y = 0$, on a vu (cas de $p = q = 1$) qu'aux caractéristiques pour lesquelles les arguments de X et de Y croissent indéfiniment

peuvent correspondre des valeurs de $x$ et $y$ tendant vers zéro avec un argument fini.

Deuxième cas. — *$\lambda$ est négatif.*

**10.** On sait que, dans ce cas, l'équation (1) admet toujours deux intégrales holomorphes $y(x)$ ou $x(y)$, pour lesquelles la limite de $\frac{y}{x}$ prend deux valeurs distinctes. On pourra toujours faire un changement de variable tel que ces intégrales holomorphes deviennent $x = 0$, $y = 0$. Les nouvelles variables s'expriment par des fonctions des anciennes variables holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, et réciproquement. L'équation devient

$$x(1 + \ldots)\,dy + y(-\lambda + \ldots)\,dx = 0.$$

Nous poserons $\lambda = -\nu$; $\nu$ sera positif, et nous diviserons les deux termes par le coefficient de $x\,dy$. L'équation sera alors

$$x\,dy + y[\nu + \Lambda(x, y)]\,dx = 0. \tag{11}$$

Nous allons chercher s'il est possible de déterminer un développement $H(x, y)$ procédant suivant les puissances de $x$ et de $y$, et tel que l'intégrale générale de (11) soit

$$yx^{\nu}H(x, y) = \text{const}. \tag{12}$$

Il faut pour cela que l'on ait

$$x\frac{\partial H}{\partial x} - \nu y\frac{\partial H}{\partial y} = \left(H + y\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Lambda(x, y). \tag{13}$$

Nous chercherons un développement H commençant par un terme constant, que nous pourrons toujours supposer égal à un. Pour obtenir les termes de H, nous ordonnerons H suivant les puissances de $y$, les

coefficients de ces puissances étant des séries procédant suivant les puissances de $x$. En ordonnant de même A, on a

$$H(x, y) = h_0(x) + h_1(x)y + h_2(x)y^2 + \ldots + h_m(x)y^m + \ldots$$
$$A(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_m(x)y^m + \ldots$$

Nous aurons, pour déterminer les $h$, les équations

$$(14)\quad \begin{cases} \nu h_0 = a_0 h_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nu h_n = n\nu h_n + (n-1)a_0 h_n + na_1 h_{n-1} + \ldots + a_n h_0. \end{cases}$$

On pourra déterminer, terme par terme, les différents termes des $h$. En désignant par $h_{mn}$ le coefficient du terme en $x^m y^n$, on aura

$$(15)\qquad (m - n\nu)h_{mn} = \alpha_{mn} - a_{mn} = \beta_{mn}.$$

$\alpha_{mn}$ étant une fonction des coefficients $h_{m'n'}$, $a_{m'n'}$, où $m'$ et $n'$ sont inférieurs respectivement à $m$ et à $n$; $\beta_{mn}$ désigne le second membre de la relation. D'après cette relation, on voit que trois cas peuvent se présenter :

1° $\lambda = -\nu$ *est irrationnel.* — $m - n\nu$ n'étant jamais nul, on déterminera autant de coefficients que l'on voudra de H suppose existant. Je dirai que le point singulier est un *col*.

2° $\lambda = -\nu$ *est rationnel.* — Soit $\nu = \frac{p}{q}$. Pour $m = p$, $n = q$, si l'on n'a pas $\beta_{pq}$ égal à zéro, on rencontrera une impossibilité. Si $\beta_{pq}$ est nul, on pourra prendre arbitrairement $h_{pq}$, mais il pourra se présenter une impossibilité pour $m = 2p$, $n = 2q$, et, d'une façon générale, pour $m = rp$, $n = rq$.

Nous supposerons que, pour une valeur de $r$, l'impossibilité signalée se présente. Nous dirons que le point singulier est un *foyer* d'ordre $r$.

3° $\lambda = -\nu$ *est rationnel,* mais les coefficients de $X(x, y)$ sont tels qu'aucune des impossibilités signalées ne se présente. Il y aura une infinité de coefficients de H qui restent arbitraires. Le point singulier sera dit un *centre.*

**11.** Les remarques suivantes, relatives à la façon dont les coefficients $h_{mn}$ correspondent aux coefficients $a_{mn}$, nous seront utiles.

Dans le cas d'un col, à un système de valeurs de $a_{mn}$ pour lesquelles on a $m = m'$, $n = n'$, $m'$ et $n'$ étant pris arbitrairement, correspond un système et un seul de coefficients $h_{mn}$ et réciproquement. Cela résulte immédiatement de la formule (15). Dans le cas d'un foyer ou d'un centre, il en est de même pour $m < p$, $n < q$. Il n'en est plus ainsi pour $m$ ou $n$, dépassant respectivement $p$ et $q$, les nombres $m$ et $n$ étant d'ailleurs quelconques dans le cas d'un centre et étant, dans le cas d'un foyer d'ordre $r$, tels que l'une au moins des inégalités $m < pr$, $n < qr$ soit vérifiée. En effet, à un système de valeurs $a_{mn}$ correspondent une infinité de systèmes de $h_{mn}$, puisque certains de ces coefficients dépendent d'arbitraires. Mais à ces divers systèmes de valeurs des $h_{mn}$ correspond toujours le même système de $a_{mn}$ : le système des valeurs de $a_{mn}$ d'où l'on a déduit les $a_{mn}$. En effet, la formule (15) fait correspondre à un système de $h_{mn}$ un seul système de $a_{mn}$, et comme les $h_{mn}$ ont été calculés à l'aide de cette formule, ce sont bien les $a_{mn}$ d'où l'on a déduit les $h_{mn}$ qui leur correspondent.

Une question se pose au sujet de la distinction entre les foyers et les cols. Nous avons dit que, si $\beta_{pq}$ est nul, le coefficient $h_{pq}$ est arbitraire. Ne pourra-t-on disposer de cette arbitraire de telle manière qu'il ne se présente pas d'impossibilité dans la détermination de $a_{2p,2q}$, et ainsi de suite, disposer des constantes restées arbitraires, de manière à éviter les impossibilités qui se présentent pour $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$? Il n'en est rien.

Supposons qu'on soit arrivé à déterminer $h_0$, $h_1$, $h_{rq-1}$ et tous les termes de $h_{rq}$ où l'exposant de $x$ est inférieur à $p$, certains des coefficients étant restés arbitraires, montrons que la condition d'existence du terme

$h_{mn}x^m y^n$ ne dépendra pas des constantes arbitraires et ne pourra donc être satisfaite en leur attribuant des valeurs convenables.

La convergence des séries $h_0, h_1, \ldots, h_{rq-1}$, qui va être admise pour le moment, sera démontrée bientôt.

Considérons l'équation

$$(16) \qquad x\,dy - y\,dx \left[ y - A(x, y) - \gamma x^r y^q \right].$$

Si, pour l'équation (11), la condition d'existence du terme $h_{pr,qr}x^{pr}y^{qr}$ est $\beta_{pr,qr} = 0$, pour l'équation (16) cette condition sera $\beta_{pr,qr} + \gamma = 0$. En prenant $\gamma$ satisfaisant à cette égalité, on pourra déterminer tous les termes de $h_{rq}$. Soit

$$H_{rq}(x, y) = h_0 + yh_1 + y^2 h_2 + \ldots + y^{rq} h_{rq}.$$

Il existe une équation ayant pour intégrale générale

$$yx\,H_{rq}(x, y) = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad u = \text{const.}$$

Si cette équation est mise sous la forme (16), ceux de ses termes qui ne contiennent pas $y^{rq+1}$ en facteur sont identiques aux termes analogues de (16). Mais cette équation admet aussi pour intégrale de la forme cherchée

$$u(x, y) = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_r u^r = \text{const.},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant des constantes arbitraires, ce qui nous donne la façon dont les constantes arbitraires entrent dans les coefficients. La condition d'existence du terme en $x^{rp}y^{rq}$ étant satisfaite quelles que soient les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_r$, cela pour une valeur fixe de $\gamma$, on voit que ces constantes n'entrent pas dans $\beta_{rp,rq}$.

On montrerait d'une façon analogue que si, dans la recherche du développement H, on rencontre des impossibilités en procédant par la méthode indiquée, on en rencontrera de même avec toute autre méthode

de détermination de H. On pourrait chercher H en l'ordonnant par rapport à $x$, en l'ordonnant en série de polynomes homogènes. Il résulte de là que la distinction entre les foyers et les centres est relative à la nature même de l'intégrale générale et non à la façon de la chercher.

**12.** Dans le cas d'un col et dans celui d'un centre, il existe un développement H satisfaisant formellement à l'équation. Il est naturel de se demander s'il est convergent, Dans le cas d'un centre, M. J. Bendixson, généralisant un raisonnement de M. Poincaré, a démontré la convergence. Nous retrouverons ce résultat. Dans le cas d'un col, le développement est convergent pour des classes étendues d'équations. En égalant à zéro la différentielle de $yx^{\nu}\mathrm{H}(x, y)$, où H est un développement convergent, on obtient, en effet, une équation de la forme voulue. On peut aussi démontrer que si les seuls coefficients $a_{mn}$ de $\mathrm{A}(x, y)$ qui ne soient pas nuls sont ceux pour lesquels on a $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} > \nu$, ou la suite inverse d'inégalités, $m'$ et $n'$ étant des nombres fixes, H sera convergent. On peut remarquer que, si $\nu$ est rationnel et si les mêmes hypothèses sont vérifiées, le point singulier sera un centre et jamais un foyer.

La possibilité, dans le cas d'un col, d'avoir un développement H divergent me paraît avoir été admise sans qu'on en ait donné de démonstration, sans doute parce que ce n'est là qu'un résultat négatif. Les auteurs, qui examinent des développements dans les termes desquels entrent en dénominateurs des expressions $m - n\nu$ ou des expressions analogues devenant aussi petites que l'on veut, ne se sont pas placés au point de vue qui nous occupe [1]. *Je vais montrer que le développement* H *peut être divergent.*

Lemme. — *Il est possible de trouver un nombre $\nu$ tel qu'il y ait une infinité de valeurs de $m$ et de $n$ pour lesquelles on ait*

$$0 < n\nu - m < 2m^{-n}n^{-n}.$$

(1) Poincaré, *Sur les fonctions à espèces lacunaires* (*Acta Societatis Fennicæ*, 1884).

Prenons une fraction décimale arbitraire $\alpha$. Soit $l$ le nombre de ses chiffres décimaux. Posons $n_1 = 10^l$, $m_1 = n_1\alpha$. On peut ajouter à la droite de $\alpha$ assez de 0 et enfin un 1 pour obtenir une fraction décimale $\alpha_1$, telle que l'on ait $0 < n_1\alpha_1 - m_1 < (m_1^2 n_1^2)^{-1}$. En remplaçant l'unité qui est à la droite de $\alpha$ par 2, on a une fraction $\beta_1$ avec

$$0 < n_1\beta_1 - m_1 < 2(m_1^2 n_1^2)^{-1}.$$

En opérant sur la fraction $\alpha_1$ comme sur la fraction $\alpha$, on déterminera des fractions $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_i, \beta_i$ et une série d'entiers $m_i$, $n_i$ croissant indéfiniment. Les fractions $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i$ allant en croissant et restant inférieures à une quelconque des fractions $\beta_i$ auront une limite $\nu$ comprise entre $\alpha_i$ et $\beta_i$ et telle, par suite, qu'on ait

$$0 < n_i\nu - m_i < 2(m_i^2 n_i^2)^{-1}.$$

Il serait facile de montrer que le nombre $\nu$ ainsi défini est transcendant.

Prenons maintenant un nombre $\nu$, défini comme il vient d'être dit, et considérons l'équation analogue à (13)

$$\nu y\frac{\partial H}{\partial y} - x\frac{\partial H}{\partial x} = \left(H + y\frac{\partial H}{\partial y}\right)A(x, y).$$

Supposons que A ne contienne que des termes $x^m y^n$ pour lesquels on ait $n\nu - m > 0$ et que les coefficients de tous ces termes soient positifs. Le développement H qu'on peut obtenir à l'aide de cette équation sera convergent ou divergent. Si nous considérons l'équation analogue obtenue en remplaçant $A(x, y)$ par

$$A(x, y) = a_0 x^m y^n + x^{m_1} y^{n_1} + \ldots + x^{m_i} y^{n_i} + \ldots,$$

le développement H correspondant sera certainement divergent quels que

soient $x$ et $y$. Le premier développement H ne contenait que des termes positifs; il en est de même du second, mais, dans celui-ci, le coefficient du terme en $x^m y^n$ est au moins égal à $(n_i\nu - m_i)^{-1}$, c'est-à-dire supérieur à $m_i^{m_i} n_i^{n_i}$, $m_i n_i$ étant les nombres dont il a été question. Il y a une infinité de termes supérieurs à $(my)^m(nx)^n$, termes qui croissent indéfiniment quels que soient $x$ et $y$. *On a donc, dans certains cas, un développement* H $(x, y)$ *divergent si petits que soient* $x$ *et* $y$.

**15.** Bien que nous ne puissions rien affirmer dans la plupart des cas, sur la convergence de H, la possibilité de déterminer autant de termes de H que l'on veut, dans le cas d'un col ou d'un centre et, dans le cas d'un foyer, tous les termes en $x^m y^n$ pour lesquels on a une des inégalités, $m < rp$, $n < rq$ va nous permettre de donner à l'équation des formes qui faciliteront la démonstration de certaines propriétés.

Montrons d'abord que, si l'on a déterminé formellement $h_0(x)$, $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ à l'aide des équations (14), les développements obtenus sont convergents.

Supposons déterminés $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ et la convergence de ces développements démontrée. L'équation fournissant $h_n$ nous donne $h_n(0)$. Cette équation est une équation différentielle en $h_n$ et $x$, qui admet le point singulier, $h_n(0)$, $x = 0$. En remarquant que l'on a $a_0(0) = 0$, on voit qu'elle admet une seule intégrale holomorphe $h_n(x)$, qui existe toujours si $n\nu$ n'est pas entier. Il y en aura une infinité dans le cas où, $n\nu$ étant entier, le coefficient $\beta_{mn}$ de $x^m$, dans le terme indépendant de l'équation qui donne $h_n$, est nul. Dans tous les cas, en faisant $n$ égal successivement à 1, 2, 3, etc., la convergence des divers développements est démontrée.

On montrerait de même que, si l'on cherche à obtenir H en le mettant sous la forme

$$k_0 + k_1(y)x + k_2(y)x^2 + \ldots + k_m(y)x^m + \ldots,$$

on obtiendra pour $k_0, k_1, \ldots, k_m$ des développements convergents. On

peut désigner par $K_m$ l'ensemble des $m-1$ premiers termes de H ainsi développé.

On peut faire un changement de variables tel que, la nouvelle équation étant mise sous la forme (11), A contienne en facteur $x^m y^n$. Considérons $H_{n-1}$, $K_{m-1}$, ces deux développements auront un nombre fini de termes communs.

Désignons par K la somme des deux expressions d'où l'on a retranché une fois ces termes communs. L'égalité $yx^\nu K = \text{const.}$ sera l'intégrale générale d'une équation différentielle, qui se laissera toujours mettre sous la forme

$$(17)\qquad x\,dy - y[\nu - A_{mn}(x,y) - x^m y^n B(x,y)]\,dx = 0.$$

$A_{mn}$ sera identique à l'ensemble des termes de A de l'équation (11) qui ne contiennent pas $x^m y^n$ en facteur. Cette équation (11) s'écrira donc

$$x\,dy - y[\nu + A_{mn}(x,y) + x^m y^n B(x,y) + x^p y^q C(x,y)]\,dx = 0.$$

Si l'on fait le changement de variables $xK^\nu = x_1$, l'équation (17) deviendra

$$x_1\,dy - \nu y\,dx_1 = 0.$$

L'équation (11) se mettra par suite, en supprimant l'indice, sous la forme

$$(18)\qquad x\,dy - y[\nu + x^p y^q D(x,y)]\,dx = 0.$$

Le raisonnement suppose seulement que la détermination des coefficients de K a été possible. On pourra donc prendre $m$ et $n$ aussi grands que l'on veut dans le cas d'un col ou d'un centre et $m < pr$, $n \leqq qr$ dans le cas d'un foyer.

**14.** L'existence du développement H ne pouvant être démontrée,

cherchons une intégrale générale d'une autre forme. Nous prendrons par exemple

$$F(x, y) = \text{const.},$$

F étant un développement suivant les puissances de $y$, pour les coefficients duquel nous accepterons n'importe quelle fonction de $x$.

$$F(x, y) = f_0 + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \ldots + f_s(x)y^s + \ldots$$

F satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(19) \qquad x\frac{\partial F}{\partial x} - \nu y\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial F}{\partial y}A(x, y).$$

Nous pourrons écrire

$$A(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_s(x)y^s + \ldots;$$

supposer, lorsque cela nous sera utile, que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont identiquement nuls et que tous les autres coefficients contiennent $x^m$ en facteur.

Dans ce qui suit, on supposera d'abord seulement $a_0(x) = 0$. On a

$$f_0(x) = 0;$$

on pourra toujours prendre $f_0 = 0$. On aura

$$xf_1'(x) = \nu f_1(x), \qquad \text{d'où} \qquad f_1(x) = cx^\nu;$$

on pourra prendre $c = 1$.

Pour déterminer les autres coefficients, on aura

$$xf_s'(x) = s\nu f_s(x) + \sum k a_{s-k}(x) f_k(x) \qquad [k = 1, 2, \ldots (s-1)].$$

Si nous supposons que $A(x, y)$ soit convergent, pour $|x| < a$, $|y| < b$,

nous pourrons achever de déterminer les $f$ en supposant qu'ils s'annulent pour $x = a$. On aura donc

$$f(x) = x^{\nu} \int_{a}^{x} \frac{\Sigma h_{\alpha+\beta} f_k \, dx}{x^{\nu+1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour allant du point d'affixe $a$ au point d'affixe $x$. Les fonctions soumises à la quadrature n'ayant pas d'autre point singulier dans le cercle de convergence de rayon $a$ que le point $x = 0$, on pourra, en posant $x = \rho e^{i\theta}$, réduire le contour d'intégration aux deux portions suivantes : 1° une partie rectiligne allant de $x = a$ à $x = \rho$ ; 2° un arc de cercle de rayon $\rho$ et de longueur $\rho\theta$ allant du point $x = \rho$ au point $x = \rho e^{i\theta}$.

Je vais chercher des conditions suffisantes pour que le développement F, dont les divers termes sont définis, soit convergent. Pour cela, j'examinerai successivement ce qui se passe le long des deux portions du contour d'intégration.

Considérons d'abord la première portion. Soit $\alpha$ le maximum du module de $a_1(x) + a_2(x)y + \ldots + a_\nu(x)y^{\nu-1} + \ldots$ lorsqu'on a $|y| < b$ et que $x$ est réel et compris entre 0 et $a$. Les divers termes de $A(x, y)$ seront inférieurs en module aux termes correspondants de $\frac{\alpha b}{b - |y|}$. Considérons l'équation

$$x\,dy + y\left(\nu - \frac{\alpha b y}{b - |y|}\right) dx = 0;$$

son intégrale générale est

$$yx^{\nu}\left(1 - y\frac{\nu + \alpha b}{\alpha b}\right)^{\frac{\nu}{\nu + \alpha b}} = \text{const.}$$

ou

$$C(x, y) = g_1 y + g_2 y^2 + \ldots + g_s y^s + \ldots = \text{const.}$$

On voit immédiatement que les $g_1, g_2, \ldots, g_s$ sont donnés par des équations de la forme (14), où les $a$ sont remplacés par des quantités

supérieures en module et, comme, de plus, pour $x = a$, les $g$ sont des quantités positives, tandis que $f_2, \ldots, f_s, \ldots$ se réduisent à o pour $x = a$, on voit que G est une fonction majorante de F. Par conséquent, F converge, à condition que l'on ait

$$|y| < \frac{\gamma h}{1 + \gamma h} \quad \text{ou} \quad |y| < \delta.$$

Considérons la seconde portion du contour. Le développement trouvé devient, pour $x = \rho$, $F(\rho, y)$. Nous devons trouver, pour la seconde portion du contour, une fonction F définie par l'équation (19) et se réduisant, pour $\theta = 0$, à $F(\rho, y)$. Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer que, en remplaçant $x$ par $\rho e^{i\theta}$, $\rho$ étant constant et $\theta$ variable, on obtient au moyen de (19) un développement $F(y, \theta)$ se réduisant, pour $\theta = 0$, à $y$. Pour éviter toute ambiguïté, désignons $F(y, \theta)$ par $h(y, \theta)$. La fonction $F[\rho, h(y, \theta)]$, qui sera définie, pourvu que l'on ait $|h(y, \theta)| < \delta$, satisfera à l'équation aux dérivées partielles et se réduira, pour $\theta = 0$, à $F(\rho, y)$.

Il n'y a aucun inconvénient à désigner par $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_s$ les différents coefficients de $h(y, \theta)$ développé suivant les puissances de $y$. On aura

$$f_1 = e^{i\alpha\theta} \qquad f_s(\theta) = e^{i\alpha s\theta} \int_0^{\theta} \frac{\Sigma k a_k f_k}{e^{i\alpha\theta}} d\theta \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots, s-1].$$

Pour avoir une limite supérieure du module des $f$, il suffira de remplacer $e^{i\theta}$ par l'unité, les $a$ par des quantités supérieures en module et $\theta$ par sa valeur absolue, ce qui revient à supposer $\theta$ positif.

Nous allons maintenant supposer que l'on a

$$a_0(x) = a_1(x) = \ldots = a_{n-1}(x) = 0$$

et que tous les autres termes de $A(x, y)$ contiennent en facteur $x^m$ (dans

le cas d'un foyer on aura $m = pr$, $n = qr$. On pourra, par suite, désigner par $\frac{\rho^m \beta}{h}$ le maximum du module de

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} y + \ldots,$$

lorsque $y$ reste à l'intérieur de son cercle de convergence et que $x$ décrit le cercle de rayon $\rho$. Il en résulte que, si l'on considère, pour l'équation

$$(20) \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{d\eta} \frac{\beta\rho^m \eta^n}{h - \eta},$$

l'intégrale se réduisant à $y$ pour $\theta = 0$, cette intégrale sera une fonction majorante de $h(y, \theta)$. Or, cette intégrale existe, puisque l'équation (20) est une équation pour laquelle $\theta = y = 0$ sont des valeurs ordinaires. On peut donc trouver $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ tels que $h(y, \theta)$ soit convergent pour $|y| < \varepsilon$, $|\theta| < \varepsilon'$; on peut prendre $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ assez petits pour que l'on ait $|h(y, \theta)| < \delta$. Si l'on cherche le développement de $g$ ordonné maintenant suivant les puissances de $\theta$, le terme indépendant de $\theta$ étant $y$, le terme en $\theta$ contiendra $\rho^m \beta y^n$ en facteur, et d'une façon générale $\theta$ n'entrera dans le développement que par l'expression $\beta\rho^m y^n \theta$. Le développement $h$ sera donc convergent si l'on a

$$|y| < \varepsilon, \qquad |\rho^m y^n \theta| < \eta.$$

Proposons-nous de déterminer ces limites $\varepsilon$ et $\eta$.

L'équation de comparaison est

$$h(y, \theta) - y \frac{d\theta}{dy} + \beta\rho^m y^n \frac{d\theta}{dy} = 0.$$

Si l'on pose

$$\beta\rho^m y^n \theta = \omega, \qquad y = bz,$$

l'équation devient

$$h(bz, \omega) - nz \frac{d\omega}{dz} + z\omega = 0.$$

Équation dont l'intégrale générale est, pour $n \neq 1$,

$$\sqrt[n-1]{1 - \frac{nz}{n-1} - n\omega} = \text{const.},$$

ce qui définit un développement, en $z$ et $\omega$, se réduisant, pour $\omega = 0$, à un développement dont tous les termes sont positifs. En remplaçant $\omega$ et $z$ par leurs valeurs, on aura donc, *a fortiori*, une fonction majorante de $h(y, \theta)$. Le développement trouvé sera convergent et restera inférieur à $\delta$ si l'on a

$$\frac{n}{n-1} z < \frac{1}{4}, \qquad n|\omega| < \frac{1}{4}, \qquad z^2 < \frac{\delta}{2}.$$

On prendra pour $z$ la plus petite des deux limites.

Dans le cas où $n$ est égal à 1, l'équation de comparaison a pour intégrale

$$z + \omega e^{-z} = \text{const.}$$

Si l'on considère la fonction $g$ déterminée par la relation

$$(z + \omega) e^{-z} = g e^{-g},$$

ce sera une fonction holomorphe de $z$ et $\omega$ dans le voisinage de $z = \omega = 0$. Cette fonction est solution de (20) et se réduit à $z$ pour $\omega$ égal à 0. Elle fournira donc, à un facteur constant près, une fonction majorante de $h$. Cette fonction majorante sera holomorphe pour toutes les valeurs de $z$ et $\omega$ telles que $g$ ne prenne pas la valeur *un*, pour laquelle la dérivée de $ge^{-g}$ est nulle. Il suffit de plus pour que $h(y, \theta)$ reste inférieur à $\delta$ que $g$ soit inférieur à $\delta$. On satisfait à toutes ces conditions, en prenant

$$|z| < \frac{\delta}{10}, \qquad |\omega| < \frac{\delta}{10}.$$

*Nous obtenons donc une intégrale générale de la forme*

$$y f_1(x) + y^2 f_2(x) + \ldots = \text{const.},$$

*le premier membre étant un développement suivant les puissances de $y$, convergent pour*

$$|y| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |x^{\alpha} y^{\alpha\theta}| < \eta,$$

*$\theta$ désignant l'argument de $x$.*

**15.** On peut trouver des conditions de convergence toutes différentes, pour le développement F, dont il vient d'être question, en opérant de la façon suivante :

Posons $x = ae^{-u}$ avec $u = \sigma\cos\omega + i\sigma\sin\omega$ ; $\omega$ et $\sigma$ sont de nouvelles variables réelles. Nous ne considérons que des valeurs de $a$ telles que $\cos\omega$ soit positif puisqu'on prend $|x| < a$.

Les fonctions $f_1, f_2, f_3$ définies tout à l'heure seront des fonctions uniformes de $u$. On a

$$f = e^{-\nu u} \int^{u} \sum k u^{\ldots} f_{\ldots} e^{\ldots} du.$$

L'intégrale peut être prise, puisqu'il s'agit d'une fonction uniforme, suivant une ligne droite allant de o à $u$ dans le plan de la variable complexe $u$. On obtiendra une limite supérieure du module des $f$, en remplaçant $e^{-\nu u}$ par $e^{\nu\sigma\cos\omega}$ et les $a$ par les termes correspondants d'une fonction majorante. Prenons pour cette dernière $\frac{\alpha b y}{b - y}$. Ces substitutions reviennent à considérer l'intégrale de

$$dy + y\left(-\nu\sigma\cos\omega + \frac{\alpha b y}{b - y}\right) d\sigma = 0,$$

qui se réduit à $y$ pour $\sigma = 0$. Cette équation a pour intégrale générale

$$y e^{-\nu\sigma\cos\omega}\left(1 - y\frac{\nu b - \nu\cos\omega}{\nu b\cos\omega}\right)^{\frac{\nu}{\nu - \alpha}} = \text{const.}$$

Cette intégrale, qui se réduit pour $\sigma = 0$, à une fonction de $y$ dont tous les coefficients sont positifs, est *a fortiori* une fonction majorante.

On a une fonction holomorphe de $y$, tant que l'on a

$$|y| < \frac{\rho b \cos\omega}{\rho b + \rho \cos\omega}.$$

Soit

$$z = a\rho e^{i\omega} = a e^{-\sigma \cos\omega + i \sin\omega},$$

on aura

$$\cos\omega = \frac{-\log\rho}{\sqrt{\theta^2 + (\log\rho)^2}}.$$

La condition de convergence devient

$$|y| < \frac{-\rho b \log\rho}{\rho b \sqrt{\theta^2 + (\log\rho)^2} - \rho \log\rho} = \frac{\rho b}{\rho b + \rho}.$$

Pour y satisfaire, il suffit de prendre

$$\frac{\theta}{|\log\rho|} < b \qquad \text{ou} \qquad \rho < e^{-\frac{\theta}{b}}$$

et

$$|y| < \frac{\rho b}{\rho b \sqrt{b^2 + 1} + \rho}.$$

Suivant les circonstances, l'une ou l'autre des deux conditions de convergence trouvées pour F peut être plus avantageuse.

**16.** Demandons-nous quelle est la forme des fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x)$$

que nous avons introduites. Examinons d'abord le cas d'un col ou d'un centre. Au lieu de me servir de l'expression de ces fonctions sous forme d'intégrales, je trouve plus commode d'opérer de la façon suivante. L'équation ayant pour intégrale

$$y(1 + h_1 y + h_2 y^2 + \ldots + h_n y^n) = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad u = \text{const.},$$

étant mise sous la forme (1), a, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, mêmes termes ne contenant pas $y^{n+1}$ que l'équation donnée. Il en résulte que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seront identiques pour les deux équations.

Supposons que pour $x = a$ l'intégrale $(u)$ se réduise à

$$b_0 y + b_1 y^2 + \ldots + b_n y^n.$$

L'équation

$$b_0 \mathrm{K} + b_1 \mathrm{K}^2 + b_2 \mathrm{K}^3 + \ldots + b_n \mathrm{K}^n = u,$$

définit une fonction K qui est une intégrale de l'équation que nous venons de former, et cette intégrale se réduit à *un* pour $x = a$. Les $n$ premiers termes de K, développé suivant les puissances de $y$, seront identiques aux $n$ premiers termes de $\mathrm{F}(x, y)$ intégrale de l'équation (1). Or, on a

$$\mathrm{K} = u(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_n u^n + \ldots)$$

les $c_0, c_1, \ldots, c_n$ étant des constantes. Il en résulte qu'à un facteur près $c_0$ on a

$$f_n(x) = x^s [h_n(x) + \Sigma x^s \psi_s(x)] \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

$h_n(x)$ étant la série en $x$ dont nous avons démontré la convergence à propos de la recherche de $\mathrm{H}(x, y)$ (§ 15); $\psi_s(x)$ étant des développements qui sont des fonctions linéaires de

$$h_1(x), \quad h_2(x), \quad \ldots, \quad h_n(x).$$

*L'intégrale* F *considérée peut donc s'écrire*

$$yx^s[1 + yf_1(x, x^s) + y^2 f_2(x, x^s) + \ldots + y^n f_n(x, x^s) + \ldots] = \text{const.},$$
$$\Sigma y^n x^s \psi_{ns}(x) = \text{const.}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$\psi_{ns}$ étant un développement suivant les puissances de $x$ convergent pour $x$ suffisamment petit.

17. Nous allons conclure de là que, dans le cas d'un centre, on peut trouver une intégrale générale de la forme $y x^{\nu} H(x, y) = \text{const.}$, H étant holomorphe dans le voisinage de $x = y = 0$.

Remplaçons dans l'équation différentielle et dans l'intégrale $x$ par $x e^{2k\pi i}$, $k$ étant un entier. L'équation différentielle ne changera pas ; il en résulte que le nouveau $\Sigma$ obtenu sera encore une intégrale générale de la même équation différentielle ; il en sera de même de la somme des divers $\Sigma$ obtenus en donnant à $k$ les valeurs $0, 1, 2, q-1$, $\left(\nu = \frac{l}{q}\right)$. Considérons dans cette somme les termes provenant d'un terme $y^n x^{s\nu} \varphi_{ns}(x)$, si l'on pose $e^{2\pi i\nu} = \omega$ l'ensemble de ces termes peut s'écrire

$$y^n x^{s\nu} \varphi_{ns}(x) \left[1 + \omega^{s\nu} + \omega^{2s\nu} + \ldots + \omega^{(q-1)s\nu}\right].$$

Cette somme sera nulle, puisque $\omega^{qs}$ est égal à *un*, à moins que $\omega^s$ ne soit égal à *un*. Ce dernier cas ne se présente que si $\nu$ est un entier, c'est-à-dire si $s$ est un multiple de $q$. Tous les termes de la somme où $s$ ne sera pas un multiple de $q$ disparaîtront. Il ne restera que les termes où $s\nu$ est entier, et par suite multiple de $p$ ; comme on a $m > s$, $n$ sera au moins égal à $q$. L'intégrale obtenue contiendra $y^q x^p$ en facteur.

*Nous aurons dans le cas d'un centre une intégrale de la forme*

$$y^p x^q K(x, y),$$

K *étant une fonction holomorphe*. On déduit immédiatement de là l'existence d'une intégrale de la forme $y x^{\nu} H(x, y) = \text{const.}$ *Il est donc possible de déterminer les constantes restées arbitraires dans les $h_{ns}(x)$ de manière à obtenir un développement* H *convergent* (¹).

(¹) On doit remarquer l'analogie entre la méthode employée et la méthode donnée par M. J. Bendixson (Stockholm Öfversigt, 1897), méthode qui peut être considérée comme la réalisation d'une démonstration donnée par M. Poincaré (*Journal de mathématiques*, [illegible]).

**18.** Dans le cas d'un foyer, on se rend compte facilement, par l'examen des équations (14) définissant les $h_n$, qu'on peut trouver des intégrales de forme assez simple de ces équations en prenant les fonctions suivantes : 1° pour $n < rq$, $h_n$ est un développement holomorphe ; 2° pour $rq < n < 2rq$, $h_n$ est la somme d'un développement holomorphe et d'un terme de la forme $x^{rp}\log x\,\varphi_n(x)$ ; $\varphi_n(x)$ étant holomorphe pour $x = 0$ ; $\varphi_{rp}(x)$ se réduit à une constante ; 3° pour $krq \leqq n < (k+1)rq$, $h_n$ est la somme d'un développement holomorphe et d'un terme de la forme

$$\sum x^{rp}\log x^{m}\varphi_{mk}(x),$$

$m$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots, k$ et $\varphi_{mk}(x)$ étant holomorphe pour $x = 0$.

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas d'un col ou d'un centre, de l'existence de cette intégrale formelle

$$yx^{\nu}[h_0(x) + yh_1(x) + y^2h_2(x) + \ldots + y^nh_n(x) + \ldots] = \text{const.},$$

dont la convergence n'est pas établie, nous concluons l'expression des différents termes $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ de l'intégrale dont nous avons étudié la convergence. $f_n(x)$ sera un polynome de degré $n+1$ par rapport à $x$ contenant $x^{\nu}$ en facteur et un polynome de degré $k$ par rapport à $x^{rp}\log x$, si l'on a $krq \leqq n < (k+1)rq$. Les coefficients de ces polynomes sont des fonctions de $x$ holomorphes pour $x = 0$.

La nature de ces termes montre qu'il est bien naturel que la valeur de l'argument de $x$ intervienne dans la condition de convergence du développement $F(x, y)$, tout au moins dans le cas d'un foyer.

**19.** Dans le cas d'un centre, on conclut de l'existence d'une intégrale générale $yx^{\nu}H(x, y) = c$, $c$ étant une constante arbitraire, et H étant holomorphe pour $|x| < \eta$, $|y| < \varepsilon$, qu'il ne passe par l'origine que les deux intégrales $x = 0$, $y = 0$, ou, d'une façon plus précise, que les caractéristiques fournies par les deux intégrales holomorphes. Pour toute autre intégrale, obtenue en donnant à $c$ une valeur différente de zéro, on

voit immédiatement que, si $x$ tend vers zéro d'une façon quelconque, $|y|$ devient supérieur à $\varepsilon$. L'intégrale sort du champ de convergence, où nous pouvons l'étudier. L'énoncé qui précède est encore exact même si les variables $x$ et $y$ ne sont pas telles que les deux intégrales holomorphes soient $x = 0$ et $y = 0$.

Ces conclusions subsistent dans le cas d'un col lorsque le développement $H(x, y)$ dont nous savons déterminer les termes, est convergent. S'il n'en est pas ainsi, je ne puis affirmer que les conclusions subsistent, bien que la chose paraisse probable.

Dans le cas d'un foyer, les conclusions qui précèdent sont fausses. *Nous montrerons qu'il existe une infinité de caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent tous les deux vers zéro.*

Je vais étudier quelques propriétés des intégrales de l'équation différentielle dans le voisinage des valeurs singulières $x = 0$, $y = 0$. Ces propriétés sont communes aux cas d'un col, d'un foyer ou d'un centre.

On peut énoncer le théorème suivant :

*Si l'on considère une caractéristique pour laquelle $|x^\alpha y^\beta \theta|$ ne devienne pas infini, $|y|$ deviendra supérieur à $\varepsilon$.*

$\varepsilon$ est la limite de $|y|$ telle que le développement $F(x, y)$ soit convergent ; $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres positifs quelconques, dans le cas d'un col ou d'un centre, assujettis aux conditions $\alpha < pr$, $\beta \leqq qr$, dans le cas d'un foyer ; $\theta$ est l'argument de $x$.

En effet, on peut trouver des nombres $m$ et $n$ et faire un changement de variable tel que $F(x, y)$ soit convergent pour $|x^m y^n \theta| < \eta$, $|y| < \varepsilon$ ; l'un au moins des nombres $m$ et $n$ étant respectivement supérieur à $\alpha$ et à $\beta$. Si $|x^\alpha y^\beta \theta|$ ne croît pas indéfiniment $|x^m y^n \theta|$ tendra vers zéro avec $x$, la première condition de convergence finira toujours par être vérifiée. Si la seconde l'était, la caractéristique considérée satisferait à la relation $F(x, y) = \text{const.}$, ou

$$21 \qquad yx^r[1 + yf_1(x, x^r) + \ldots + f_0(x, x^r) + \ldots] = c.$$

D'après ce que nous avons dit sur les fonctions majorantes de F, on sait que $|F|$ est inférieur au module d'une fonction de comparaison dont tous les termes contiennent $x^c$ en facteur; ce module tend donc vers zéro. La constante $c$ fournissant la caractéristique ne peut être que $c = 0$. Or à $c = 0$ la relation (21) ne fait correspondre que les intégrales $x = 0$, $y = 0$. Il en résulte que $|y|$ ne peut rester inférieur à $\varepsilon$. Le théorème est démontré pour les nouvelles variables employées. Le théorème est encore vrai pour les variables primitives de l'équation (2), à condition toutefois que ce soient celles de l'équation (11), c'est-à-dire que les deux intégrales holomorphes soient $x = 0$, $y = 0$. En effet, soient X et Y les nouvelles variables, $\Theta$ l'argument de $X(x, y, \theta)$ se rapportant aux variables primitives. On a les relations

$$X = x(1 + \ldots), \qquad Y = y(1 + \ldots)$$

qui montrent que le rapport des modules de $x$ et de X reste fini et différent de zéro et que la différence des arguments reste finie lorsque $x$ et $y$ restent compris dans le champ $|x| < a$, $|y| < b$, pour lequel les changements de variables sont valables. Il en est de même pour les modules et les arguments de $y$ et de Y. Il résulte de là que si $X^\alpha Y^\beta \Theta$ croît indéfiniment, il en est de même de $x^\alpha y^\beta \theta$, et réciproquement.

Si l'équation (1) admet l'intégrale $x = 0$ et non l'intégrale $y = 0$, le résultat obtenu doit être modifié. Nous avons $Y = \varphi(x) + y(1 + \ldots)$; le rapport $\frac{X}{Y}$ peut devenir nul ou croître indéfiniment, et, par suite, $X^\alpha Y^\beta \Theta$ pourra rester fini ou croître indéfiniment, sans qu'il en soit de même de $x^\alpha y^\beta \theta$. Mais nous pouvons considérer $x^\alpha \theta$, et la démonstration employée montrera que si cette quantité ne croît pas indéfiniment $|y|$ deviendra supérieur à $\varepsilon$. On montrerait de même que, *si l'équation admet l'intégrale $y = 0$ sans l'intégrale $x = 0$, il faut pour que $|y|$ reste inférieur à $\varepsilon$ que $x^\alpha \theta$ croisse indéfiniment.*

Dans tous ces cas, pour qu'une caractéristique reste comprise dans le champ de convergence ($|y| < \varepsilon$) lorsque $x$ tend vers zéro, il faut que $\theta$ croisse indéfiniment.

Aucune des caractéristiques, pour lesquelles l'argument de $x$ reste fini, ne restera comprise dans le champ de convergence lorsque $x$ tend vers zéro.

On ne peut pas énoncer de résultat analogue dans le cas où l'équation différentielle n'admet ni l'intégrale $x = 0$, ni l'intégrale $y = 0$. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer l'équation à coefficients réels

$$(x + \ldots)\,dy + (y + \ldots)\,dx = 0$$

dont M. Poincaré a étudié les intégrales réelles, l'origine étant soit un foyer, soit un centre. Nous avons une infinité de caractéristiques pour lesquelles on a constamment $|x| < a$, $|y| < \varepsilon$, l'argument de $x$ restant nul.

On peut énoncer le théorème suivant, analogue au précédent et dont la démonstration se fait de même. Désignons par $\theta$ et $\omega$ les arguments de $x$ et $y$; par $\alpha$ et $\beta$ deux nombres positifs quelconques dans le cas d'un col et assujettis, dans le cas d'un foyer, aux inégalités $\alpha < pr$, $\beta \leq qr$, une de ces inégalités pouvant être remplacée par l'égalité. *Pour toute caractéristique pour laquelle $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro : 1° si l'équation admet les deux intégrales $x = 0$, $y = 0$, $x^\alpha y^\beta \theta$ et $x^\alpha y^\beta \omega$ croissent indéfiniment ; 2° si l'équation admet l'intégrale $x = 0$, $x^\alpha \theta$ et $x^\alpha \omega$ croissent indéfiniment ; 3° si l'équation admet l'intégrale $y = 0$, $y^\beta \theta$ et $y^\beta \omega$ croissent indéfiniment.*

Il en résulte que, quelle que soit la valeur de $\nu$, si l'équation admet les deux intégrales $x = 0$ et $y = 0$ pour toutes les caractéristiques tendant vers l'origine $x\theta$, $y\omega$, $y\theta$, $y\omega$ croîtront indéfiniment.

*Aucun de ces résultats ne subsiste si l'équation (1) n'admet ni l'intégrale $x = 0$, ni l'intégrale $y = 0$.*

**20.** Je me propose de mettre en évidence que $|x^\alpha y^\beta \theta|$ croît indéfiniment lorsque $x$ tend vers zéro, si $|y|$ reste inférieur à $\varepsilon$, en me servant de l'équation différentielle, sans employer l'intermédiaire du développement donnant l'intégrale générale. Soient $x = \rho e^{i\theta}$, $y = re^{i\omega}$. Considérons une

caractéristique pour laquelle $x$ tend vers zéro. $\theta$ peut être regardé comme une fonction de $\rho$ définie par la loi suivant laquelle $x$ tend vers zéro; $r$ et $\omega$ sont des fonctions de $\rho$ définies par les deux équations obtenues en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation différentielle. On a

$$\frac{dr}{r} + i\,d\omega + \left(\frac{d\rho}{\rho} - i\,d\theta\right) \rho + e^{i\theta} \frac{\rho^{\theta}}{\rho} \cdot A \rho^{\theta} \cdot r e^{-i\omega} = 0.$$

$$(21) \qquad \frac{dr}{r} - \frac{d\rho}{\rho} + \rho^{-\theta} r\, C\,d\rho - \rho^{-\theta} r\, D\,d\theta = 0,$$

en posant $A \rho e^{i} \cdot r^{\theta} = C + iD$. C et D étant des fonctions de $r$, $\rho$, $\omega$, $\theta$ qui pour $\rho < a$, $r < b$ restent inférieures en module à un nombre fixe $\mu$. Soient $\rho_0$, $\theta_0$, $r_0$, $\omega_0$, les valeurs initiales de la caractéristique, on aura

$$(22) \qquad \rho \log r - \rho_0 \log r_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{-\theta} r\, C\,d\rho - \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^{-\theta} r\, D\,d\theta = 0.$$

Supposons que $\rho$ aille toujours en diminuant et que $\theta$ varie toujours dans le même sens, en croissant par exemple. Nous reviendrons sur ces hypothèses, sans lesquelles il me paraît difficile de faire une démonstration rigoureuse. Dans ces conditions, $\rho$ tendant vers zéro, le troisième terme du premier membre reste fini, le second est constant, le premier croît indéfiniment; il faut, par suite, que le quatrième croisse indéfiniment. Ceci exige que $\theta$ croisse indéfiniment. Je vais montrer qu'il faut également que $\rho^{-\theta} r$ croisse indéfiniment, $x$ étant inférieur à $m$, pour toute intégrale pour laquelle $|y|$ reste inférieur à $\varepsilon$. Si cette quantité restait finie on aurait

$$\rho^{-\theta} r < k, \qquad r < k \rho^{\theta},$$

$k$ étant un nombre fixe. En remplaçant $r$ par cette valeur dans (22) on augmente le premier terme; on augmente également le dernier terme en remplaçant en même temps D par $\mu$, maximum de son module. Si dans

ces conditions nous montrons que le premier membre de (22) devient négatif, nous aurons montré qu'on ne peut pas avoir simultanément, pour $x$ tendant vers zéro, $\rho^{m-\alpha} < k$ et $|y| < \varepsilon$.

En ne considérant que les termes qui deviennent infinis, on voit que ce premier membre se réduit à

$$\left(\nu - \frac{1}{n}\right)\log\rho + \int_{\theta_0}^{\theta}\left(\mu k\rho^{m-\alpha} - \frac{1}{n}\right)d\theta.$$

Or, dans le cas d'un col ou d'un centre, on peut prendre $m$ et $n$ tels que $\nu - \frac{1}{n}$ soit positif. Il en est de même dans le cas d'un foyer d'ordre $r$, puisque $\nu = \frac{p}{q}$ et qu'on peut prendre $m = rp$, $n = rq$. On peut de plus supposer $\rho$ assez petit pour que $\mu k\rho^{m-\alpha} - \frac{1}{n}$ soit négatif. Les deux termes deviennent donc négatifs.

**21.** Nous avons supposé que $\rho$ et $\theta$ variaient chacun dans le même sens; ce ne sera pas une hypothèse restrictive, si nous montrons qu'à une caractéristique obtenue en prenant la valeur initiale $x_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, et faisant décrire à $x$ un arc aboutissant au point $\rho e^{i\theta}$, et pour laquelle on ait toujours $|y| < \varepsilon$, on peut faire correspondre une caractéristique ayant mêmes valeurs initiales $x_0, y_0$, et mêmes valeurs finales $x$ et $y$, et obtenue en faisant décrire à $x$ un arc de courbe pour lequel $\rho$ aille en décroissant, et $\theta$ en variant toujours dans le même sens, cette caractéristique satisfaisant également à la condition $|y| < \varepsilon$. Mais on ne peut admettre *a priori* qu'il en soit ainsi, car les valeurs de $|y|$ correspondant à la première caractéristique pourraient rester inférieures de $\varepsilon$, tandis qu'il pourrait ne pas en être de même pour la seconde caractéristique.

En effet, si $\theta$ ne varie pas toujours dans le même sens, il existe dans le plan des $x$ des rayons vecteurs issus de l'origine et sous-tendant un arc de la courbe décrite par $x$. Soit $\alpha\beta\gamma$ cet arc, $\alpha$ étant plus éloigné de zéro que ne l'est $\gamma$. Considérons la caractéristique définie lorsque $x$ parcourt

cette courbe : soit $y_\gamma$, $y_\delta$ les valeurs de $y$ lorsque $x$ se trouve en $z_\gamma$ et en $z_\delta$. Considérons l'intégrale répondant aux conditions initiales suivantes : pour $x$ en $z_\gamma$, $y$ prend la valeur $y_\gamma$. Si l'on fait varier $x$ de $z_\gamma$ en $z_\delta$ suivant le rayon vecteur, il est facile de montrer que $|y| = r$ va en diminuant.

[illegible]

L'égalité (21) nous donne pour $dr = 0$

$$\rho dr + r^2 = \rho^n r^n (\ldots) d\rho = 0$$

$r$ va en diminuant lorsque $\rho$ augmente, puisque $\ldots = \rho^n r^n$ (...) a le signe de ... pour les valeurs de $\rho$ et de $r$, suffisamment petites, que nous considérons.

Nous avons donc une fonction $y(x)$ satisfaisant à l'équation, et définie tout le long du contour $\alpha\beta\gamma\delta$; ce contour, ne renfermant pas l'origine, ne renferme aucun point singulier de $y(x)$, on peut remplacer l'arc $\alpha\beta\gamma$ par $\alpha\delta\gamma$, $y$ restera inférieur à $\varepsilon$. En opérant ainsi, on remplacera la courbe par une courbe pour laquelle $\theta$ varie toujours dans le même sens ou reste constant; on pourrait même supprimer cette dernière restriction.

Il est facile de montrer ensuite, par un raisonnement analogue, qu'on peut remplacer la spirale, $\rho = \varphi(\theta)$, suivant laquelle $x$ tend vers l'origine, par une spirale, $\rho_1 = \varphi_1(\theta)$, tangente à la première en une infinité de points et telle que l'on ait $\rho_1 \geqq \rho$, $\rho_1$ allant toujours en diminuant.

**22.** Ces remarques vont nous servir à comparer la condition nécessaire trouvée, dans le cas où l'équation admet l'intégrale $x = 0$, pour qu'il y ait une intégrale pour laquelle $x$ et $y$ tendent vers zéro, à une condition

indiquée par M. Picard [1]. M. Picard fait remarquer qu'il faut que $x$ tende vers l'origine dans le plan des $x$ en décrivant un arc de longueur infinie. Il en est bien entendu de même pour $y$ si l'équation admet l'intégrale $y = 0$. Nous avons vu, d'autre part, que l'équation admettant l'intégrale $x = 0$, la quantité $\rho\theta$ croît indéfiniment. Si nous n'imposons à la courbe décrite par le point $x$ de coordonnées $\rho$ et $\theta$ aucune restriction, les deux conditions : 1° cette courbe a une longueur infinie ; 2° pour cette courbe $\rho\theta$ croît indéfiniment, sont distinctes. Un arc de courbe peut avoir une longueur infinie, sans que $\rho\theta$ croisse indéfiniment, et réciproquement. Mais, si l'on impose, comme on peut toujours le faire, la restriction que sur l'arc de courbe $\rho$ diminue et $\theta$ varie toujours dans le même sens, *la condition : $\rho\theta$ croît indéfiniment entraîne la condition : $x$ tend vers l'origine suivant un arc de longueur infinie.*

En effet, l'arc de courbe décrit depuis le point $\rho = \rho_0$; $\theta = 0$ jusqu'au point $\rho\theta$ est supérieur à l'arc, d'angle au centre $\theta$, décrit sur le cercle de rayon $\rho$, et par conséquent supérieur à $\rho\theta$, et doit croître indéfiniment. *La réciproque n'est pas vraie.* Si l'on considère la spirale $\rho\theta = 1$, elle a une longueur infinie.

**23.** Nous avons dit n'avoir aucune raison rigoureuse pour admettre qu'il n'y ait pas, dans le cas d'un col, des caractéristiques autres que $x = 0$ et $y = 0$ pour lesquelles $x$ et $y$ tendent vers zéro. Nous allons montrer que, *dans le cas d'un foyer, il existe toujours une infinité de caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro.*

On peut toujours, en prenant pour nouvelles variables $ax^{rp}$ et $y^{rq}$, $a$ étant une constante convenable, mettre l'équation (18) sous la forme

$$x\,dy + y\left[1 + \varphi(x)\right]dx + B\left[dx\right] = 0,$$

B contenant, en général, des puissances fractionnaires, mais s'annulant

[1] Voir Traité d'Analyse, t. III, n° [illegible]

pour $x = y = 0$ et devenant aussi petit que l'on veut, pour $x$ et $y$ suffisamment petits.

Si l'on divise les deux membres de l'équation par $(1 - xy)(1 - B)$, la somme des coefficients de $x\,dy$ et de $y\,dx$ étant égale à un, pour la nouvelle équation, celle-ci se met sous la forme

$$x(1 - xy) - xy\xi\,dy + y(1 + xy) + xy\xi\,dx = 0.$$

En posant $x = \rho e^{-\omega}$, $y = \rho e^{+\omega}$, l'équation précédente devient

$$d\rho = \rho^2(1 + \xi)\,d\omega.$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire et prenant

$$\omega = h - it, \qquad \rho = re^{i(\theta + \beta)}, \qquad \xi = \alpha + i\beta,$$

et supposant $h$ constant et $t$ variant seul, on a

$$dr = r^2[1 + \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta]\,dt,$$
$$d\theta = \rho r^2[\beta\cos\theta - (1 + \alpha)\sin\theta]\,dt.$$

$\alpha$ et $\beta$ seront des fonctions de $t$, $r$ et $\theta$ qui, pour $r$ suffisamment petit, seront aussi petites que l'on voudra. Nous ferons varier $t$ en décroissant, par exemple. Traçons le cercle trigonométrique sur lequel, en prenant A pour origine, nous représenterons l'arc $\theta$. On peut déterminer un nombre $\varepsilon$ et deux points H et K sur le cercle, tels que si l'on a $r < \varepsilon$ et l'extrémité M de l'arc $\theta$ située sur l'arc HAK, le facteur

$$1 + \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta$$

soit positif. Si M est situé sur cet arc, $r$ ira en décroissant. Nous suppo-

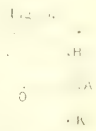
serons les valeurs initiales de la caractéristique satisfaisant aux conditions initiales

$$r < \varepsilon; \qquad \text{M entre H et K}: \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Le facteur $(\beta\cos\theta + (1+\alpha)\sin\theta)$, ou bien aura le signe de $(1+\alpha)\sin\theta$, et alors $\theta$ se rapprochera de zéro, ou bien aura le signe contraire, et l'on aura

$$|\operatorname{tang}\theta| < \frac{\beta}{1+\alpha}.$$

ce qui, pour $r$ suffisamment petit, exige que M tombe entre K et H. Dans les deux cas, $r$ ira en décroissant. Ou bien $r$ atteindra la valeur zéro pour une valeur finie de $t$, ou bien $|t|$ croissant indéfiniment, $r$ tendra vers une limite. Nous allons voir que cette limite ne peut être que zéro; dans tous




les cas *nous aurons une caractéristique pour laquelle $x$ et $y$ tendent vers zéro.*

Posons $t = \frac{1}{u}$; l'équation devient

$$u^2\,dr + r\,[(1+\alpha)\cos\theta - \beta\sin\theta]\,du = 0. \tag{23}$$

que l'on peut considérer comme une équation différentielle en $r$ et $u$, $\theta$ étant pour une caractéristique donnée une fonction de $u$. Si, $u$ tendant vers zéro, la valeur de $r$ satisfaisant à l'équation (23) tend vers une limite, cette limite ne peut être que zéro. Nous pouvons ajouter que $r$ ne peut prendre la valeur zéro que pour $t$ croissant indéfiniment, c'est-à-dire pour $u$ devenant nul; cela résulte encore de l'équation (23).

De la démonstration qui précède il résulte que, pour les caractéristiques que nous obtenons, et qui tendent vers l'origine, $\theta$ tend vers zéro. En effet, nous avons vu que, ou bien $\theta$ se rapproche de zéro ou bien satisfait à la condition $|\operatorname{tang}\theta| < \frac{\zeta}{\ }|$. Dans le premier cas, on montrera sans peine, en raisonnant comme pour $r$, que $\theta$ ne peut tendre que vers la limite zéro lorsque $t$ croît indéfiniment. Dans le second cas, $\zeta$ tendant vers zéro, il en sera de même de $\theta$, d'après la condition $\left|\operatorname{tang}\theta\right| < \left|\frac{\zeta}{1-\zeta}\right|$.

Un raisonnement analogue montrerait que, si $t$ varie en croissant, $r$ tend vers zéro, mais $\theta$ tend vers $\pi$.

Considérons les caractéristiques que nous avons obtenues, en faisant devenir $t$ infini par valeurs négatives. On a

$$x = r^{-\frac{1}{2}} e^{\ } \left[\ \ \right], \qquad y = r^{\frac{1}{2}} e^{\ } \left[\ \ \right],$$

$r$ et $\zeta$ sont des fonctions qui tendent vers zéro. L'argument du produit $xy$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Pour $t$ devenant infini et positif, nous avons une autre série de caractéristiques pour lesquelles l'argument de $xy$ tendra vers $\frac{\pi}{2}$.

*On montrerait de même l'existence de caractéristiques pour lesquelles l'argument de $xy$ tend vers $k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k$ entier.*

La démonstration subsiste avec de très légères modifications, si l'on suppose que $h$, au lieu d'être une constante, est une fonction de $t$, qui tend vers une limite finie lorsque $t$ croît indéfiniment. Comme on a

$$\frac{1}{t} \ \ = e^{\ } \ \ ,$$

on voit que nous montrerions ainsi que toutes les caractéristiques pour lesquelles le module de $\ $ tend vers une limite finie et différente de zéro, et pour lesquelles l'argument de $\frac{1}{\ }$ croît indéfiniment, tendent vers l'origine.

Nous devons remarquer que, même en admettant la généralisation signalée, et considérant toutes les caractéristiques pour lesquelles le module de $\frac{y}{x}$ tend vers une limite qui n'est ni nulle ni infinie, tandis que l'argument croît indéfiniment, nous n'obtenons pas toutes les caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent vers zéro, car il peut y avoir des caractéristiques jouissant de cette propriété et pour lesquelles le module de $\frac{y}{x}$ ne tende vers aucune limite, ou encore tende vers zéro ou vers l'infini. Nous n'avons donc pas démontré que, pour toutes les caractéristiques tendant vers l'origine, l'argument du produit $xy$ tend vers une limite. Cependant, pour toutes les équations dont j'ai pu étudier les caractéristiques, cette circonstance se produit.

Si l'on revient aux variables primitives, on voit qu'il faut appliquer les conclusions énoncées au sujet du module et de l'argument de $xy$ et de $\frac{y}{x}$ aux quantités $ax^{pr}y^{qr}$, $\frac{y^{qr}}{ax^{pr}}$. Les conclusions subsistent pour les variables primitives de l'équation (1), quels que soient les changements de variables effectués, pourvu que l'équation primitive admette les intégrales $x = 0$, $y = 0$.

*Toute équation admettant à l'origine, un foyer d'ordre $r$, et les deux intégrales, $x = 0$, $y = 0$, admet une infinité de caractéristiques, pour lesquelles $x$ et $y$ tendent vers zéro. Ces caractéristiques jouissent des propriétés suivantes : le module du rapport $y^{qr}x^{-pr}$ tend vers une limite qui n'est ni nulle, ni infinie, et qui peut être choisie arbitrairement ; l'argument du produit $x^{pr}y^{qr}$ tend vers certaines limites déterminées. Les valeurs des différentes limites correspondant aux divers groupes de caractéristiques diffèrent entre elles de multiples $\pi$.*

Bien entendu, l'*existence des caractéristiques tendant vers l'origine en résulte pour l'équation primitive, même si cette équation n'admet pas les intégrales $x = 0$ et $y = 0$.*

**24.** Citons comme exemple d'équation donnant un foyer l'équation

$$x\,dy - y(1 - xy)\,dx = 0$$

dont l'intégrale générale est : $cxy = 1 - cy\log x$, et se met sous la forme

$$x = e^{-\alpha} e^{\alpha\beta i}, \qquad y = \frac{e^{\alpha\beta i}}{\alpha - i\beta},$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des variables réelles.

Pour que $x$ et $y$ tendent vers zéro, il faut que $\alpha$ croisse indéfiniment par valeurs positives, et que $\frac{e^{\alpha}}{\beta}$ tende vers zéro. Pour toutes ces caractéristiques, l'argument du produit $xy = \frac{1}{\alpha - i\beta}$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$, à un multiple près de $\pi$. Pour ces mêmes caractéristiques, $\frac{1}{y} = \alpha - i\beta$ a son argument qui croît indéfiniment, mais son module, dont la valeur asymptotique est $\frac{e^{2\alpha}}{\beta}$, peut devenir nul ou infini et ne tendre vers aucune limite.

On étudierait sans difficulté les caractéristiques de

$$x\,dy(2 - xy) - y\,dx(2 - xy) = 0$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$x = \frac{e^{\omega}}{\sqrt{\omega}}, \qquad y = \frac{e^{-\omega}}{\sqrt{\omega}},$$

$\omega$ étant une variable complexe, dont on ferait croître indéfiniment la partie réelle.

Citons encore comme exemples d'équations présentant un foyer et dont on peut étudier les caractéristiques, en intégrant :

$$24\,\text{bis}\qquad qx\,dy - py\left[1 - f(x)\,\varphi(xy)\right]dx = 0$$

où $f$ est une fonction de $x$ différente de zéro pour $x$ nul et $\varphi$ une fonc-

tion du produit $x^p y^q$, s'annulant avec cette quantité, $p$ et $q$ étant des entiers. De même l'équation

$$(25)\quad qx[1+P(x,y)-\varphi(x^p y^q)]\,dy+px[1-P(x,y)-\varphi(x^p y^q)]\,dx=0,$$

où P est un polynome homogène de degré $r(p+q)$ et renfermant un terme en $x^{pr}y^{qr}$; $\varphi$ est une fonction holomorphe quelconque de $x^p y^q$.

Comme exemple d'équation présentant un centre nous pouvons, en dehors des cas signalés, citer les cas suivants : 1° Dans l'équation (24) nous supposons que l'on ait $f(0)=0$, que le terme de plus faible degré de $\varphi$ soit le terme en $x^p y^q$, et que le terme $x^{2p}y^{2q}$ de $\varphi$ ait un coefficient nul; 2° dans (25) nous supposerons $\varphi$ astreint aux mêmes conditions que dans l'exemple précédent et $P(x,y)$, polynome homogène quelconque; dans le cas où il serait de degré $p+q$ ou $r(p+q)$, il ne devrait pas contenir de terme en $x^p y^q$ ou $x^{rp}y^{rq}$. Citons enfin le cas de centre tout différent

$$x[1+(x-y)f(u)]\,dy+y[1-(x-y)f(u)]\,dx=0,$$

avec

$$u=(x+y)(x-y)^2.$$

Troisième cas. — *$\lambda$ est un entier ou l'inverse d'un entier.*

**23.** Je considère l'équation

$$(26)\quad (ax+by+\ldots)\,dy=(a'x+b'y+\ldots)\,dx \quad \text{ou} \quad X\,dy=Y\,dx,$$

et je suppose que l'équation adjointe

$$a-\lambda(b'-\lambda)-a'b=0$$

ait deux racines que je désigne par $\lambda$ et $p\lambda$, $p$ étant un entier.

Citons d'abord deux cas particuliers qu'il convient de mettre à part :

1° On a $a' = b = 0$ et $a = b'$, $p$ est égal à un. On sait que l'équation

$$(F) \qquad X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda F = 0$$

admet deux solutions holomorphes différentes $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. C'est le seul cas où l'équation (F) admet deux solutions holomorphes dont les coefficients ne soient pas proportionnels. L'intégrale générale de l'équation est

$$f(x, y) = c\varphi(x, y).$$

2° $p$ étant quelconque, l'équation

$$(27) \qquad X\frac{\partial g}{\partial x} + Y\frac{\partial g}{\partial y} - \lambda g = 0$$

admet toujours une solution holomorphe $g$. L'équation

$$(28) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} - p\lambda f = 0$$

admet toujours pour solution $g^p$: nous supposerons que cette équation admette une autre solution holomorphe $f$, ayant des termes du premier degré. Il en résulte que l'intégrale générale de (26) est

$$f(x, y) = c[g(x, y)]^p.$$

En général, l'équation (27) n'admet pas d'intégrale holomorphe commençant par des termes du premier degré; on est arrêté par une impossibilité dans le calcul des termes de degré $p$ en $x$ et en $y$. Pour le voir, il suffit de ramener par un changement de variables linéaire l'équation à la forme canonique :

$$\lambda x + \ldots\, dy = \lambda p y + \ldots\, dx.$$

Dans les deux cas que nous citons, on voit immédiatement que, par un

changement de variables, on peut ramener l'équation à la forme réduite

$$x\frac{dy}{dx} = py.$$

Les intégrales $y(x)$ de l'équation donnée relatives à des valeurs initiales $x_0, y_0$, comprises dans le champ pour lequel les fonctions $f$ et $\varphi$ sont définies et les changements de variables sont valables, tendent toutes vers zéro lorsque $x$ tend vers zéro, tout comme les intégrales de l'équation réduite. Pour toutes ces intégrales $x = 0$ est un point ordinaire. Ce sont là des résultats bien connus.

Je vais montrer que, dans tous les autres cas, on a toujours deux fonctions $f$ et $\varphi$ holomorphes et nulles, pour $x = y = 0$ et solutions respectivement des équations

$$(28) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda p f = 0,$$

$$(29) \qquad X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda p \varphi - pf = 0.$$

Il en résulte, en formant avec ces deux équations une combinaison homogène, et en posant $u = \log f - \lambda \varphi f^{-1}$, que l'on a

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Nous verrons que l'on a

$$f(x, y) = g(x, y)^p,$$

$g$ étant la solution holomorphe de (27). L'intégrale générale de l'équation pourra donc s'écrire

$$\log g(x, y) - \frac{\lambda}{p}\varphi(x, y)\,|g(x, y)|^{-p} = \text{const.}$$

L'existence des solutions $f$ et $\varphi$ des deux équations (28) et (29) a été

mise en évidence par M. J. Bendixson, avec de légères différences de notations, dans le cas où $p = 1$. La méthode de M. Bendixson s'étend sans peine au cas où $p$ est un entier quelconque. Cette méthode, ainsi que celle que je vais indiquer, s'appliquent à la recherche d'une solution de l'équation

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des développements procédant suivant les puissances de variables $x_1, x_2, x_n$, ces developpements commençant par des termes du premier degré et l'équation adjointe ayant une racine d'ordre de multiplicité quelconque (¹).

**26.** Montrons d'abord que l'équation

$$(30) \qquad x\lambda_1 + \ldots \frac{\partial F}{\partial x_1} + y\lambda_2 + \ldots \frac{\partial F}{\partial x_2} + \alpha F = h x + k y + \ldots$$

où ne sont écrits que les termes de moindre degré, admet, sauf pour certaines valeurs de $\alpha$, une intégrale holomorphe. Les raisonnements sont analogues à ceux que l'on développe, dans le cas où l'on a $\alpha = \lambda$, et le second membre de (30) identiquement nul. On détermine sans peine les coefficients des divers termes de F, supposé existant; le coefficient de $x^m y^n$ est une fraction ayant dénominateur $m\lambda_1 + n\lambda_2 - \alpha$ et pour numérateur un polynome dépendant des coefficients déjà déterminés de F. Si le point d'affixe $\alpha$ ne coïncide avec aucun des points d'affixe $m\lambda_1 + n\lambda_2$ et si de plus le segment ayant pour extrémités les points $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ne comprend pas à son intérieur l'origine, le rapport de $m\lambda_1 + n\lambda_2 - \alpha$ à $m + n$ reste supérieur, quels que soient $m$ et $n$, à un nombre $\varepsilon$.

Tous les termes de F sont inférieurs en module aux termes correspondants de la fonction L définie par

$$\varepsilon \left| x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} + \ldots \right| = M \left| x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} + \ldots \right| + N \left| x + y + \ldots \right|.$$

(¹) Je n'ai pu avoir connaissance des travaux sur cette question de MM. J. Horn et L. Lindelöf.

où M et N sont des fonctions de $x+y$ holomorphes et nulles pour $x=y=0$ et qui sont des fonctions majorantes respectivement du second membre de (30) et des termes non écrits dans les coefficients de $x\frac{\partial F}{\partial x}$ et de $y\frac{\partial F}{\partial y}$. La fonction L ne dépend que de $x+y$. Soit $x+y=u$, on aura

$$\varepsilon\frac{\partial L}{\partial u}=\frac{M(u)}{u}+\frac{\partial L}{\partial u}N(u);$$

L sera donc une fonction holomorphe de $u$, pourvu que $|u|$ soit inférieur à la limite $\alpha$ pour laquelle M et N sont holomorphes, ainsi que $\frac{1}{2-N(u)}$. La fonction F sera donc holomorphe, pour $x$ et $y$ inférieurs en module à $\frac{\alpha}{2}$.

Nous voyons que la valeur de cette limite ne dépend pas des coefficients du second membre de l'équation.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*L'équation*

$$(31)\qquad X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}-\alpha F=hx+ky$$

*admet une intégrale holomorphe et nulle pour $x=y=0$, si les deux racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de l'équation adjointe sont distinctes, n'ont pas leur rapport négatif et si $\alpha$ ne coïncide avec aucun des points $m\lambda_1+n\lambda_2$.* En effet, on ramène par un changement de variables l'équation (31) à l'équation (30). *Ce développement est une série en $x$ et en $y$, dont les termes sont des fonctions de $\alpha$, de $h$ et de $k$; cette série est uniformément convergente, lorsque $\alpha$ décrit une courbe fermée ne passant par aucun des points $m\lambda_1+n\lambda_2$ et lorsque $h$ et $k$ varient d'une façon quelconque, à condition que l'on ait $|x|<\varepsilon'$, $|y|<\varepsilon'$, $\varepsilon'$ étant indépendant des valeurs prises par $h$, $k$ et $\alpha$.*

**27.** Montrons qu'on peut énoncer un théorème analogue, lorsque l'équation adjointe a ses deux racines égales.

Donnons à un des coefficients des termes du premier degré de X et Y, à $\alpha$ par exemple, un accroissement $t$, nous aurons alors l'équation

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial F}{\partial y} - \alpha F = hx + hy.$$

Nous pouvons supposer que la quantité d'affixe $t$ décrive autour de l'origine, dans son plan, une courbe fermée G, entourant l'origine, assez petite pour que, $t$ étant sur cette courbe ou à l'intérieur (exception faite pour $t = 0$), l'équation adjointe n'ait plus de racines égales.

Si $\lambda$ est la valeur de la racine double pour $t = 0$, lorsque $t$ décrit G, les racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de l'équation adjointe décriront des courbes fermées entourant $\lambda$ et aussi voisines que l'on veut de ce point. Dans ces mêmes conditions, la quantité $m\lambda_1 + n\lambda_2 - \alpha$, qu'on peut écrire

$$(m+n)\left(\frac{\lambda_1 m + \lambda_2 n}{m+n} - \frac{\alpha}{m+n}\right),$$

restera supérieure à une certaine limite, puisque $\frac{\lambda_1 m + \lambda_2 n}{m+n}$, centre de gravité de deux masses placées l'une en $\lambda_1$, l'autre en $\lambda_2$, décrit une courbe entourant $\lambda$ et aussi voisine que l'on veut de $\lambda$. Il en sera de même, si le point d'affixe $\alpha$, au lieu d'être fixe, décrit une courbe $\Gamma$ ne passant par aucun des points $m\lambda_1 + n\lambda_2$.

F sera une fonction holomorphe de $x$ et de $y$, qui sera représentée par une série, dont les termes seront des fonctions de $\alpha$ et de $t$. Cette série sera uniformément convergente lorsque $t$ décrit G et $\alpha$ une courbe $\Gamma$. On pourra prendre G assez voisine de l'origine, pour que la série soit, lorsque $t$ varie, une série uniformément convergente sur G, les termes de la série étant des fonctions holomorphes de $t$ sur la courbe G et à son intérieur. Il en résulte d'après un théorème connu [1] que la série représente une fonction de $t$ holomorphe à l'intérieur du contour G. En faisant $t = 0$ dans les différents termes, l'on obtient une solution holomorphe en $x$ et $y$ de (31).

(1) *Voir*, par exemple, la thèse de M. Painlevé, 1887.

On voit sans peine que l'on peut donner au théorème le même énoncé que dans le cas précédent.

**23.** Démontrons, à l'aide des théorèmes précédents, l'existence des deux solutions holomorphes des équations (28) et (29).

L'équation adjointe de (26) ayant pour racines $\lambda$ et $p\lambda$, l'équation

$$(32) \qquad X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} - p\alpha F = (\lambda - \alpha)^2 (hx + ky)$$

admet une solution holomorphe en $x$ et $y$, les coefficients du développement étant des fonctions de $\alpha$. La série, considérée comme fonction de $\alpha$, est définie lorsque le point d'affixe $\alpha$ décrit une courbe $\Gamma$ suffisamment petite, entourant le point d'affixe $\lambda$ et cette série est uniformément convergente. Nous allons voir que les divers termes de cette série sont des fonctions de $\alpha$ holomorphes, pour $\alpha$ compris à l'intérieur de $\Gamma$.

Il en résultera que l'on aura une fonction de $\alpha$ holomorphe, dans l'aire limitée par $\Gamma$. La dérivée de cette fonction pourra donc s'obtenir en dérivant terme à terme. En désignant par $f(x,y)$ ce que devient F lorsqu'on fait $\lambda = \alpha$, on voit que l'on aura une solution de l'équation (28). En prenant ensuite la dérivée des deux membres de (32), par rapport à $\alpha$ et en désignant par $\varphi$ la dérivée de F pour $\lambda = \alpha$, nous aurons une solution de l'équation (29). Nous aurons soin de vérifier que $f$ n'est pas identiquement nul.

Considérons d'abord le cas où $p$ est égal à *un*. Un changement linéaire de variables permet de mettre l'équation (32) sous la forme

$$(\lambda x' + \ldots)\frac{\partial F}{\partial x'} + (\lambda y' + \beta x' + \ldots)\frac{\partial F}{\partial y'} - \alpha F = (\lambda - \alpha)^2 (h'x' + k'y'),$$

Cherchons à déterminer les coefficients de F pris sous la forme

$$F = \sum A_{pq}^{(n)} x'^{(n)} y'^{(q)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, q;\ q = 1, 2, \ldots \infty).$$

On a la relation

$$(33) \qquad \lambda q - \alpha \, A^{q} = n - 1 \, p \, A^{q-1} + B'_{q} \, ,$$

$B'_q$ dépendant de coefficients supposés déjà déterminés. Pour déterminer les coefficients $A^q$, en supposant déterminés les coefficients précédents, nous ferons dans (33) $n = 0$, ce qui donne

$$\lambda q - \alpha \, A^{q} = B'_{q} \, ,$$

ensuite $n$ égal à $m$, ainsi de suite. On voit que $A^q$ contiendra en dénominateur $\lambda q - \alpha$. On voit encore que l'on a $A^0 = k - \alpha k'$ et $A^1 = k'$. Tous les coefficients $A$ seront donc des fonctions holomorphes de $\alpha$ pour $\alpha$ compris dans l'aire $\Gamma$ : pour $\alpha = \alpha$, F ne sera pas identiquement nul, si l'on suppose $k'$ différent de zéro. Ce que nous venons de dire pour F considéré comme fonction de $x'$ et $y'$, s'applique immédiatement à F considéré comme fonction de $x$ et $y$.

Considérons maintenant le cas de $p$ entier quelconque. Par un changement linéaire de variables, l'équation se met sous la forme

$$p \lambda x' \frac{\partial F}{\partial x'} + \ldots \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda y' + \ldots \frac{\partial F}{\partial y} - p \alpha F = (\lambda - \alpha)(k' - k) \, .$$

En procédant comme dans le cas précédent, on a

$$[\lambda p n - n + q - p \alpha] \, A^{q} = B \, .$$

Il ne peut donc s'introduire de coefficients non holomorphes pour $\alpha = \lambda$, que pour $n = 1$, $q = p$ et pour $n = 0$ et $p = q$.

Dans le premier cas, on a $A^1_1 = \lambda - \alpha \, k'$.

Pour considérer le second cas, remarquons que l'on aura $A^1_0$ qui contiendra en facteur $\lambda - \alpha$. Tous les $A^2$ contiendront en facteur $\lambda - \alpha$ ; de même tous les $A^3 \ldots A^{p-1}$. Il en sera de même des quantités $B^2 B^3 \ldots B^p$ que l'on peut écrire $B^{\lambda} = (\lambda - \alpha) C \ldots$

Nous aurons

$$p(\lambda - \alpha) \, A^{1}_{1} = (\lambda - \alpha) C \ldots$$

La quantité $C^p$ n'est pas nulle, pour $\lambda = \alpha$ : car si elle était nulle l'équation

$$p\lambda x' + \ldots \frac{dF}{dx} + \lambda y' + \ldots \frac{dF}{dy} - p\alpha F = \lambda - \alpha \quad h'x' + k'y'$$

admettrait une solution holomorphe qui, pour $\alpha = \lambda$, se réduirait à une fonction $\Psi$ ayant pour terme du premier degré $h'x'$. Nous serions donc dans le cas où l'équation (28) admet une solution autre qu'une puissance $p^{ième}$, cas que nous avons mis à part.

La quantité $A_0^p$ ne sera ni nulle, ni infinie, pour $\lambda = \alpha$. Tous les coefficients de F seront holomorphes, pour $\lambda = \alpha$; la fonction F se réduira, pour $\lambda = \alpha$, à une fonction $f(x, y)$ dont les termes de degré minimum seront de degré $p$ et qui satisfera à l'équation (28), cette fonction sera par conséquent égale à $g^p$.

*L'existence d'une intégrale générale de la forme*

$$\log g(x) - \frac{\lambda}{p}\varphi(xy) + [g(x, y)]^{-p} = \text{const.}$$

*est donc établie.*

**29.** Montrons comment, à l'aide de cette intégrale générale, on peut étudier dans le voisinage de $x = y = 0$ les intégrales de l'équation. On voit immédiatement que les termes du premier degré de $g$ et de $\varphi$ ne sont pas proportionnels. En posant $x_1 = g$ et $y_1 = -\frac{\lambda}{p}\varphi$, $x_1$ et $y_1$ s'expriment par des développements contenant des termes du premier degré en $x$ et en $y$ et réciproquement, $x$ et $y$ s'expriment par des développements de même forme en $x_1$ et $y_1$; $x_1$ et $y_1$ satisfont à l'équation réduite

$$x_1 \frac{dy_1}{dx_1} = py_1 - x_1^p$$

dont les intégrales s'expriment par les formules

$$x_1 = ce^{t}, \qquad y_1 = c^p t e^{-t^p}.$$

$c$ étant une constante arbitraire. Disons quelques mots des intégrales de l'équation réduite; il suffit d'étudier l'intégrale obtenue pour $c = 1$. On a

$$x_1 = e^{-\alpha} e^{i\beta}, \qquad y_1 = \alpha + i\beta - e^{-p\alpha} e^{-ip\beta}.$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux nouvelles variables réelles. Si $x$ tend vers zéro sans que son argument croisse indéfiniment, $y_1$ tend vers zéro et son argument reste fini; mais $x_1$ peut tendre vers zéro, sans que son argument reste fini, $y_1$ tendra vers zéro si $\beta e^{-p\alpha}$ tend vers zéro et l'argument de $y_1$ pourra dans ces conditions rester fini ou non. En désignant par $\rho$ le module de $x_1$ et par $\theta$ son argument, cela revient à dire que pour que $y_1$ tende vers zéro, il faut et il suffit que $\rho^p\theta$ tende vers zéro. Cette conclusion subsiste pour la variable $x$ de l'équation primitive, si celle-ci admet l'intégrale $x = 0$. Pour étudier, dans tous les cas, les intégrales de l'équation primitive, il faudrait une étude analogue à celle faite dans le Chapitre I (1er cas). On peut, cependant, dire qu'il y a une infinité de caractéristiques passant par l'origine : mais, sauf dans les cas exceptionnels signalés paragraphe **23**, il n'y a pas d'intégrale passant par l'origine.

QUATRIÈME CAS. — *$\lambda$ est nul.*

**30.** Par un changement de variable linéaire on obtient l'équation

$$(34) \qquad x \ldots dy - (ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots)\,dx = 0.$$

Cette équation admet une intégrale holomorphe $y = f(x)$. En posant $y = f(x) + y_1$, et supprimant l'indice, on obtient la nouvelle équation :

$$(35) \qquad A(x, y)\,dy - B(x, y)\,dx = 0;$$

B ne contient que des termes de degré supérieur au premier et contient $y$ en facteur; A contient un terme en $x$ du premier degré $A = x - \ldots$. Si l'on cherche à déterminer une intégrale $y = f_1(x) \ldots$, $f_1$ étant holo-

morphe et nul pour $y = 0$, on sait qu'on détermine sans peine les divers termes de $f_1$, mais que le développement obtenu est divergent en général.

Pour étudier plus facilement les intégrales de l'équation, nous allons la ramener à une forme canonique. Donnons d'abord des définitions qui seront utiles à plusieurs reprises. Étant donné $F(x, y)$ qui est, soit un polynome, soit un développement suivant les puissances de $x$ et de $y$, si les termes de degré minimum en $x$ et $y$ sont de degré $m$, je dirai que $m$ est l'ordre de F. Si je considère dans F les termes où $y$ entre avec le plus faible exposant, le plus petit des exposants de $x$ dans ces divers termes sera l'ordre en $x$ de F. Je définirai de même l'ordre de F en $y$. Ceci posé, si je fais le changement de variable $x = \varphi(y) + x_1$, où $\varphi$ sera un polynome, l'équation devient

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\{A[\varphi(y) + x_1, y] \quad B[\varphi(y) + x_1, y]\varphi'(y)\}dy \\ &\qquad + B[\varphi(y) + x_1, y]\,dx_1 = 0. \end{aligned}$$

Je vais montrer qu'on peut déterminer le polynome $\varphi$ de telle manière que l'ordre en $y$ du coefficient de $dx$ soit supérieur à l'ordre en $y$ du coefficient de $dy$ et que ce dernier ordre devienne aussi grand que l'on veut.

En effet, si je détermine les termes successifs de $\varphi$, en commençant par le premier degré, de telle manière que, à chaque nouveau terme déterminé dans $\varphi$, l'ordre en $y$ du coefficient de $dy$ augmente d'une unité, cela revient à calculer les termes successifs du développement $x = f_1(y)$ qui satisfait formellement à l'équation différentielle; on pourra donc déterminer autant de termes que l'on voudra de $\varphi$ par la condition indiquée. Les termes de $\varphi$ étant ainsi déterminés, je dis que l'ordre de $B[\varphi(y), y]$ ne pourra pas croître indéfiniment. Laissons de côté le cas où il existerait un développement holomorphe $x = \varphi_1(y)$ satisfaisant à la fois à $A(x, y) = 0$ et $B(x, y) = 0$; dans ce cas les deux termes de l'équation (35) sont divisibles par $x - \varphi_1(y)$ et le point considéré est un point ordinaire de l'équation. S'il n'en est pas ainsi, lorsque le degré de $\varphi$ sera suffisamment grand, l'ordre de l'une des quantités $A[\varphi(y), y]$ et

$B[\varphi(y), y]$ restera constant quels que soient les termes successifs que l'on déterminera dans $\varphi(y)$. Si l'ordre de $B[\varphi(y), y]$ croissait pour chaque nouveau terme déterminé dans $\varphi(y)$, l'ordre de $A[\varphi(y), y]$ resterait constant et il en serait de même de l'ordre en $y$ du coefficient de $dy$, ce qui n'est pas. $B[\varphi(y), y]$ ne peut pas être identiquement nul, si grand que soit le nombre des termes de $\varphi$, puisque cette identité ne peut avoir lieu que pour certains développements $\varphi(y)$ déterminés. L'équation se mettra donc sous la forme

$$(37)\quad x_1[1+H(x_1, y)]dy - y^m f(y)dx_1 - [x_1 K(x_1, y) + y^{m-1} g(y)]dx_1 = 0,$$

où $q$ est aussi grand que l'on veut et où les diverses fonctions H, K, $f$ et $g$ sont holomorphes dans le voisinage des valeurs nulles des variables. On a $H(0, 0) = 0$, $K(0, 0) = 0$, $g(0) \neq 0$; $m+1$ qui est au moins égal à 2 est inférieur à $q$; $f(y)$ peut être identiquement nul; s'il ne l'est pas, on a $f(0) \neq 0$. Lorsque la seconde intégrale holomorphe $x = f_1(y)$ dont il a été question existe, on peut toujours faire un changement de variable tel que, cette intégrale devenant $x_1 = 0$, on ait $f(y)$ identiquement nul.

Montrons qu'on peut faire en sorte que le coefficient de $dx$ se réduise à $y^{m+1}$. En supprimant l'indice dans $x_1$, on peut écrire l'équation (37)

$$x[1+H(x, y)]dy - K(x, y)dx - y^m f(y)dy - y^{m-1} g(y)dx = 0.$$

L'équation

$$[1+H(x, y)]dy - K(x, y)dx = 0$$

admet pour intégrale générale

$$(38)\qquad y = y_1 h(x, y, y_1),$$

$y_1$ étant une constante arbitraire, $h$ une fonction holomorphe se réduisant à 1 pour $x = y = 0$. On suppose de plus, pour que la constante $y_1$ soit en facteur dans le second membre de (38), que l'équation (37) admet

l'intégrale $y = 0$, ce qui peut être obtenu par un changement de variable sans changer la forme de cette équation.

Si l'on fait maintenant le changement de variable défini par (38) en regardant $y_1$ comme une variable, l'équation se met sous la forme

$$[x(1 + H_1(x, y_1)) + y_1^2 f_1(x, y_1)]dy_1 + y_1^{m-1} dx = 0,$$

après qu'on a divisé par un facteur holomorphe ne s'annulant pas pour $x = y_1 = 0$. En supprimant l'indice de $y_1$, l'équation peut s'écrire

$$[xA(y) + x^2 B(x, y) + y^2 C(y)]dy + y^{m-1} dx = 0.$$

Montrons qu'on peut faire en sorte que $A(y)$ se réduise à $1 + ay^m$, $a$ étant le coefficient de $y^m$ dans $A(y) = 1 + \ldots + ay^m + \ldots$.

Je considère l'équation

$$\frac{A(y)\,dy}{y^{m+1}} = \frac{1 + au^m}{u^{m+1}}\,du. \tag{39}$$

On peut démontrer que cette équation admet une infinité d'intégrales holomorphes. On peut même se dispenser de faire cette démonstration, remplacer $a$ par $a'$ dans le second membre de (39); il est facile alors de voir qu'en posant $y = u + tu$ la nouvelle équation entre $t$ et $u$ est une équation de la forme

$$u(1 + \ldots)\,dt = (mt + \ldots)\,du, \tag{40}$$

en n'écrivant que les termes de moindre degré. La constante $a'$ entre au premier degré dans les coefficients. On peut la déterminer de telle manière que l'équation (40) ait une infinité d'intégrales holomorphes; il en est de même pour (39). Soit

$$y = u + b_2 u^2 + \ldots,$$

une de ces intégrales holomorphes, si l'on fait le changement de variable

défini par cette formule. $u$ étant la nouvelle variable, l'équation prendra la forme

$$[x(1 - au^m) + x^2 B_1(x, u) + u^p C_1(u)]\,du - u^{x-1}\,dx = 0.$$

Pour éviter un dénominateur, posons $u = ky_1$, déterminons la constante $k$ par la condition $mk^m = 1$. En supprimant l'indice de $y$, l'équation prend la forme définitive

$$(11)\quad \begin{cases} x[mx(1 + ay^m) - x^2 a_2(y) - \dots \\ \qquad\qquad - x^p a_p(y) - \dots - y^p f(y)]\,dy + y^{x-1}\,dx = 0, \end{cases}$$

$a$ étant une nouvelle constante; $a_2(y) \dots a_n(y) \dots f(y)$ des fonctions de $y$ holomorphes pour $y = 0$.

**31.** Il *serait facile,* comme application de ce que nous avons dit au sujet des foyers, de mettre *en évidence une infinité de caractéristiques non holomorphes de l'équation et pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro.* En posant $y = tx$, on obtient une équation d'une forme étudiée où $\lambda = -1$ et pour laquelle le point $x = 0$, $y = 0$ est un foyer d'ordre $m$. Nous mettons ainsi en évidence une infinité de caractéristiques pour lesquelles l'argument $t^m x^m$ tend vers $\frac{\pi}{2} + k\pi$; il en résulte que *pour toutes ces caractéristiques, si l'on désigne par $\omega$ l'argument de $y$, $\cos m\omega$ tend vers zéro.* Il est bien évident qu'on n'obtient ainsi que les caractéristiques pour lesquelles $\frac{y}{x}$ tend vers zéro. Nous allons mettre, dans ce qui suit, en évidence une infinité d'autres caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent vers zéro.

Remarquons, avant, que si l'on suppose $f(y) \equiv 0$, on a une équation étudiée par Briot et Bouquet. Les changements de variables employés par Briot et Bouquet pour ramener certaines équations à la forme (11) avec $f(y) = 0$ éliminent certaines catégories d'intégrales passant par l'origine. Les changements de variables que j'ai employés pour arriver à la forme (11)

permettent de considérer, à l'aide de cette équation, *toutes* les intégrales dans la région voisine de $x = 0$, $y = 0$.

**52.** Étudions les intégrales de l'équation (41). Posons $y'' = -\frac{1}{t}$. L'équation devient

$$(42) \qquad \frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{t}\right) + x^2 b_2(t) + \ldots + x^n b_n(t) + \ldots + t^s b(t),$$

$b_2, \ldots, b_n, \ldots, b$, étant des développements procédant suivant les puissances de $\frac{1}{t^m}$ et $s$ étant un nombre positif, qu'on peut de même que $r$ supposer aussi grand que l'on veut.

Je considère d'abord l'équation obtenue en ne prenant dans le second membre que le premier terme. On obtient ainsi

$$(43) \qquad x = vt^a e^{-\frac{t}{v}},$$

$v$ étant une constante. Si $a$ est une quantité réelle, il est bien évident que pour que $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro, il faut et il suffit que la partie réelle de $t$ croisse indéfiniment par valeurs positives. Si $a$ est imaginaire de la forme $\alpha + i\beta$, il n'en est plus de même. On a

$$t = \rho\cos\omega + i\sin\omega, \qquad x = vt^{\alpha + i\beta} e^{-\frac{\rho\cos\omega}{v} - \frac{i\sin\omega}{v}}, \qquad e^{i\left(\beta\log\rho - \frac{\sin\omega}{v}\right)}.$$

Pour des raisons analogues à celles exposées au paragraphe **9**, il n'y a pas lieu, *a priori*, de n'examiner que le cas où $\omega$ reste fini. Si $\omega$ croît indéfiniment, $x$ et $y$ peuvent tendre vers zéro sans que $\rho\cos\omega$ croisse indéfiniment par valeurs positives; nous obtiendrons ainsi une catégorie de caractéristiques tendant vers l'origine ou voisines de l'origine. Cependant comme l'étude de ces caractéristiques présenterait déjà quelques difficultés pour l'équation réduite que je considère, et comme l'étude des caractéristiques analogues, pour l'équation complète, m'a paru peu abordable, dans tout ce qui suivra je ferai varier $\omega$ dans les limites finies, telles que $\cos\omega$

reste positif, par exemple entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Cela revient à faire varier $\rho$ à l'intérieur d'un secteur ayant l'origine pour sommet et un angle égal à $\frac{\pi}{m}$.

En considérant l'équation réduite, on peut dire que $x$ et $y$ tendent vers zéro, si $\rho$ croît indefiniment et si l'on a $-\frac{\pi}{2} < \omega_1 < \omega < \omega_2 < \frac{\pi}{2}$, $\omega_1$ et $\omega_2$ étant deux nombres fixes. Ces nombres doivent être différents de $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, si $\alpha$, partie réelle de $a$, est positif; on peut les prendre égaux à $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, si $\alpha$ est négatif.

L'argument de $y$ reste fini, puisque $y$ varie, d'une façon d'ailleurs arbitraire, à l'intérieur d'un secteur. Lorsque $y$ tend vers zéro, l'argument de $x$ peut rester fini ou non, cela dépend de la loi suivant laquelle $y$ tend vers zéro.

*Toutes les intégrales $x$, $y$ de l'équation réduite à deux termes tendent donc vers zéro avec $y$, lorsque $y$ reste compris à l'intérieur d'un secteur facile à déterminer.*

**55.** Ces conclusions vont s'étendre au cas général. Je considère d'abord le cas où l'équation (41) admet l'intégrale $x = 0$; on a alors $b(t) = 0$. Si je fais le changement de variable défini par (43), $v$ étant une nouvelle variable, j'obtiens

$$(44)\qquad \frac{dv}{dt} = v^2 t^{\alpha} e^{-t} b_2(t) + v^3 t^{2\alpha} e^{-2t} b_3(t) + \ldots + v^{m+1} t^{m\alpha} e^{-mt} b_{m+1}(t) + \ldots$$

En prenant pour variable $\frac{1}{v}$, on met en évidence, pour $t$ croissant indéfiniment dans les conditions indiquées, une infinité d'intégrales $v(t)$ dont la limite pour $t$ infini peut être choisie arbitrairement. C'est, avec des notations différentes, le raisonnement de Briot et Bouquet.

Afin de pouvoir étudier le cas où $b(t)$ n'est pas identiquement nul, je vais montrer que l'équation (44) admet une infinité d'intégrales qui

peuvent se mettre sous la forme

$$(45)\qquad v = c + c^2\varphi_2(t) + c^3\varphi_3(t) + \ldots + c^{n+1}\varphi_{n+1}(t) + \ldots,$$

$c$ étant une constante arbitraire, les $\varphi$ étant des fonctions de $t$ définies lorsque l'argument de $t$ varie dans les conditions indiquées, et les $\varphi$ tendant vers zéro, lorsque $t$ croît indéfiniment. On a

$$\varphi_{n+1}(t) = t^{-n}e^{-t}b_{n+1}(t) + nt^{-n+1}e^{-n+1}b_n(t)\varphi_2(t) + \ldots,$$

les termes non écrits s'obtenant en prenant les coefficients de $c^{n+1}$ dans les expressions obtenues en remplaçant $v$ par sa valeur dans les divers termes de (45). On aura

$$(46)\qquad \varphi_{n+1}(t) = -\int_t^{\infty} t^{n}e^{-n}b_{n+1}(t)\,dt - \int_t^{\infty} nt^{n-1}e^{-n+1}b_n(t)\varphi_2(t)\,dt.$$

$i$ variera à l'intérieur du secteur pour lequel $t^n e^{-t}$ tend vers zéro, lorsque $t$ croît indéfiniment. On lèverait toutes les objections que pourrait susciter l'emploi d'une limite infinie pour les intégrales, en définissant $\varphi_n(t)$ sur un rayon vecteur allant du point $t = 0$ à l'infini, faisant varier ce rayon vecteur dans le secteur considéré et montrant enfin que l'on a défini ainsi une fonction analytique dans le secteur, ce qui se fait sans difficultés. C'est, du reste, en prenant la valeur de $\varphi_{n+1}$ le long d'un rayon vecteur, que nous allons chercher une limite supérieure du module de cette quantité. Posons $t = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ et laissons $\omega$ constant, $\rho$ variant. J'obtiendrai une quantité supérieure en module à $\varphi_{n+1}$ en remplaçant dans chaque intégrale $t^n$ et $e^{-t}$ par leurs modules; $b_{n+1}(t)$, $b_n(t)$, ..., par des quantités $-M$, $M$ étant supérieur en module à ces diverses quantités; en remplaçant $dt$ par $d\rho$; la limite inférieure $t$ de l'intégrale par $\rho$; les $\rho_2, \rho_3, \ldots$, par des quantités supérieures en module et supprimant enfin le signe $-$ devant chacune des intégrales. Montrons d'abord l'existence de M. Le développement $a_2(x) + xa_3(x) + \ldots + x^{n-2}a_n(x) + \ldots$, qui entre dans (41) n'est pas en général convergent, quels que soient $x$ et $y$: il est convergent, par

exemple, pour $|x| < \varepsilon$, $|y| < \eta$. En prenant pour nouvelle variable $\varepsilon x$, ce qui ne change pas le rapport des termes $mx^{l-1} + ny^{l-1}$ et $y^{l-1}dx$, on peut toujours supposer que $\varepsilon$ est égal à 1. Dans ces conditions on obtient, pour le développement considéré, la fonction majorante $\frac{M}{(1-x)(1-y)}$ pour $|x| < 1$, $|y| < \eta$.

Évaluons maintenant une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_{\ } e^{-z\cos\omega} z^{\alpha} e^{-z\cos\omega} dz,$$

obtenue en remplaçant dans une des intégrales du second membre de (16) $t^{m\alpha}$, $e^{-nt}$, $dt$ par leurs modules et faisant abstraction des facteurs $b_n(t)$, $\varphi_p(t)$. Soit $a = \alpha + i\beta$.

Posons pour abréger $u(z) = e^{-\beta\omega} z^{\alpha} e^{-z\cos\omega}$. On a

$$u'(z) = \int_{\ }^{z} u(z)\left(\cos\omega - \frac{\alpha}{z}\right) dz.$$

Donc, si l'on a

$$(17) \qquad \cos\omega - \frac{\alpha}{z} > h,$$

$k$ étant une constante positive, l'intégrale considérée sera inférieure à $\frac{u(z)}{nk}$. Si $\alpha$ est négatif, la condition (17) sera réalisée, quel que soit $z$, pourvu que $\cos\omega$, qui est positif, reste supérieur à un nombre positif $h$. Si $\alpha$ est positif, il faudra que l'on ait $\cos\omega > h$ et $\rho > l$; $l$ étant un nombre positif facile à déterminer une fois $h$ choisi. Dans les deux cas il faut que le point d'affixe $t$ reste compris à l'intérieur d'un secteur limité par les droites $\omega = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon'$, $\omega = \frac{\pi}{2} + \varepsilon'$, $\varepsilon'$ étant du reste aussi petit que l'on veut.

Ceci posé, on voit que les divers termes de la fonction $c$ définie par (14) sont, en désignant par C le module de $c$, inférieurs aux termes correspon-

dants de la fonction X définie par

$$X = C + \frac{NX^2 u}{1 - Xu}, \qquad N = \frac{M}{k}, \qquad u = e^{-2\omega} \rho^2 e^{2\cos\omega}.$$

Il en résulte que la fonction $x = vt^a e^{-t}$ a des termes inférieurs en module aux termes correspondants de la fonction X définie par

$$X = Cu + \frac{NX^2}{1 - X},$$

$$N + 1)X^2 - (Cu + 1)X + Cu = 0.$$

Nous considérons celle des racines de cette équation qui se réduit à zéro pour $u = 0$; elle est donnée par

$$2(N - 1)X = 1 + Cu - \sqrt{1 - 2Cu(1 + 2N) + C^2 u^2}.$$

Elle peut être développée suivant les puissances de $Cu$, pour $Cu$ inférieur à une limite facile à obtenir. Les développements donnant $x$ et $v$ seront convergents quelle que soit la constante $c$, pourvu que $t$ soit suffisamment grand et situé à l'intérieur du secteur déjà défini. La quantité à laquelle le module de $t$ doit rester supérieur est inversement proportionnelle à $|C|$. Nous avons fait la restriction $\cos\omega > h$; cette restriction peut être levée dans le cas où $\alpha$ est négatif, et il suffit, alors, que $\cos\omega$ reste positif. Je me contenterai d'énoncer ce résultat qui me paraît de peu d'importance et que je ne pourrais établir sans quelques longueurs.

Nous venons d'établir que le développement donnant l'expression de $x = t^a e^{-t} v$ suivant les puissances d'une constante arbitraire $c$ est convergent, si le module de $ct^a e^{-t}$ est inférieur à une certaine limite $m$. Pour une valeur déterminée de la constante $c$, les divers termes de $x$ et, par suite, $x$ tendront vers zéro lorsque $t^a e^{-t}$ tendra vers zéro, $t$ restant compris à l'intérieur d'un certain secteur. Remarquons que, dans les mêmes conditions, la dérivée de $x$ par rapport à la constante $c$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{dc} = t^a e^{-t} f(c, t),$$

$f(c, t)$ étant fini et l'on peut prendre $m'$ assez petit pour que $ct^m e^{-t}$ étant inférieur en module à $m'$, $f(c, t)$ soit aussi voisin que l'on veut de *un*. Cela résulte immédiatement de la forme trouvée pour la fonction majorante X.

**34.** Étudions maintenant le cas où l'équation (1) n'admet pas l'intégrale $x = 0$; $b(t)$ n'est plus identiquement nul. Nous aurons une intégrale de l'équation si, dans

$$x = vt^m e^{-t} = ct^m e^{-t}\left[1 + c\varphi_2(t) + c^2\varphi_3(t) + \ldots\right],$$

on considère *c comme une fonction de t* satisfaisant à l'équation

$$(18) \qquad \frac{dc}{dt} = t^{-m-1} e^{t} \frac{b(t)}{f(c, t)}.$$

Montrons que les valeurs initiales étant convenablement choisies $ct^m e^{-t}$ est une fonction de $t$ qui tend vers zéro, lorsque $t$ croît indéfiniment, dans le secteur considéré. D'après ce que nous avons vu sur la fonction majorante X, il en résultera que $x$ tendra vers zéro. On a

$$ct^m e^{-t} = c_0 t^m e^{-t} + t^m e^{-t} \int_{t_0}^{t} t^{-m-1} e^{t} \frac{b(t)}{f(c, t)} dt.$$

Le premier terme du second membre tendant vers zéro, considérons le second. Pour évaluer l'intégrale, nous pouvons remplacer l'arc de courbe suivant lequel s'effectue l'intégration et qui va de $t_0 = \rho_0(\cos\omega_0 - i\sin\omega_0)$ à $t = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ par un arc de courbe de rayon $\rho_0$ et une portion de rayon. On voit ainsi, en désignant par $u$ un nombre supérieur au module de $\frac{b(t)}{f(c, t)}$, que le second terme sera inférieur en module à

$$u\left[e^{-2(\omega-\omega_0)} t^m e^{-2\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{2z} z^{-m-1} e^{-(m+1)z} dz + e^{-(m+1)\omega_0} t^m e^{-\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} \rho_0^{-m-1} e^{z} e^{-(m+1)z} dz\right],$$

$z$ désignant la variable d'intégration qui est réelle. Le second terme de

cette expression tend vers zéro. En raisonnant sur l'intégrale qui est dans le premier terme comme nous l'avons fait pour une intégrale (§ **33**), on voit que ce terme est inférieur à

$$\frac{e^{-\rho^{\alpha}\cos m\omega}}{k}\left|\rho^{\alpha}e^{\rho^{\alpha}\cos m\omega}-\rho_0^{\alpha}e^{\rho_0^{\alpha}\cos m\omega_0}\right|.$$

$k$ étant un nombre fixe. On voit que ce terme tend vers zéro lorsque $\rho$ croît indéfiniment.

Le raisonnement que nous avons fait suppose que $ct^{\alpha}e^{-t}$ reste inférieur à une certaine limite $m'$. Il en est bien ainsi. En effet, prenons la valeur initiale $c_0$ assez petite et la valeur $t_0$ assez grande; $ct^{\alpha}e^{-t}$ commencera par être inférieur à $m'$ et nous avons vu, dans ces conditions, que $ct^{\alpha}e^{-t}$ est une somme de termes qui sont aussi petits que l'on veut pour $t$ suffisamment grand. On en conclurait, sans peine, que $ct^{\alpha}e^{-t}$ ne peut devenir supérieur à $m'$. Nous avons donc une infinité de caractéristiques $(x, t)$ de l'équation (2) qui tendent vers zéro lorsque $t$ s'éloigne indéfiniment de l'origine, en restant à l'intérieur d'un secteur pour lequel, en désignant par $\omega$ l'argument de $t$, $\cos\omega$ reste supérieur à un nombre positif $h$, que l'on peut d'ailleurs prendre aussi petit que l'on veut.

On en conclut immédiatement, puisqu'on a $y'' = -\frac{1}{t}$, que l'*équation* (1) *admet une infinité de caractéristiques* $(x, y)$ *qui tendent vers zéro, lorsque* $y$ *tend vers zéro, d'une façon arbitraire en restant à l'intérieur d'un secteur, pour lequel, en désignant par* $\theta$ *l'argument de* $y$, $\cos m\theta$ *reste inférieur à un nombre négatif* $-h$, $h$ *étant d'ailleurs aussi petit que l'on veut.*

*Nous avons de plus signalé, paragraphe* **31**, *l'existence d'une infinité de caractéristiques pour lesquelles* $x$ *tend vers zéro, lorsque* $y$ *tend vers zéro de telle manière que* $\cos m\theta$ *tende vers zéro.*

Nous concluons encore, de ce qui précède, que si les valeurs initiales, $x_0$, $y_0$ d'une caractéristique sont suffisamment petites et si $y_0$ ainsi que $y$ sont les affixes de points tels que $\theta$ étant l'argument d'une de ces quan-

tités, $\cos m\theta$ reste inférieur à $h$. $x$ reste aussi petit que l'on veut pourvu que $y$ reste suffisamment petit.

**55.** On retrouve une partie de ces résultats, par la méthode suivante que je vais indiquer brièvement. Considérons l'équation (42) et posons

$$t = \rho \cos\omega + i \sin\omega, \qquad r = re^{i\theta}.$$

$r$, $\rho$, $\theta$, $\omega$ étant des variables réelles. L'équation devient

$$(49) \quad dr - ir\,d\theta + \left[re^{i\omega} + r(A + Bi) + \rho^{-1}(C + Di)\right] d\rho + i\rho\,d\omega = 0.$$

A, B, C, D étant des fonctions réelles des variables, fonctions que nous pourrons supposer aussi petites que l'on voudra, à condition que $r$ et $\frac{1}{\rho}$ soient suffisamment petits. En considérant l'intégrale $x(\rho, y)$ dont les valeurs initiales sont $r_0$, $\rho_0$, $\theta_0$, $\omega_0$, on peut, pour étudier la valeur qu'elle prend pour une certaine valeur de $t$, faire varier d'abord $\omega$ à partir de $\omega_0$ en laissant $\rho$ constant; laisser ensuite $\omega$ constant et faire varier $\rho$. On montre sans peine que si l'on prend la différence $\omega - \omega_0$ finie (nous prendrons $|\omega - \omega_0| < \pi$) le module de $r$ reste très petit, si $r_0$ et $\frac{1}{\rho_0}$ sont suffisamment petits lorsque $\omega$ varie. Il reste à montrer qu'il en est de même lorsque $\omega$ est constant et que $\rho$ varie. En égalant à zéro la partie réelle de (49) on obtient

$$\frac{dr}{d\rho} = -r\cos\omega + A + \rho^{-1} C.$$

Comparons $r$ à la fonction $z(\rho)$ définie par

$$e^{z} = h\rho^{k} + c,$$

où $c$ est une constante arbitraire et $h$ et $k$ des constantes que nous allons déterminer. Cette fonction $z(\rho)$ satisfait à l'équation

$$\frac{dz}{d\rho} = hz + hk\rho^{k-1}\left(1 + \frac{c}{h\rho^{k}}\right).$$

Or, si nous prenons $h$ et $k$ tels que l'on ait

$$\cos\omega + A + h > 0, \tag{50}$$

$$hk\left(1 - \frac{1}{k\rho}\right) + C > 0, \tag{51}$$

la dérivée $\frac{d(z-r)}{dz}$ sera positive tant que $z$ sera supérieur à $r$. Il en résulte qu'en prenant des valeurs initiales $z_0, r_0$ telles que $z_0 - r_0$ soit positif, $r$ restera inférieur à $z$, tant que les conditions (50) et (51) seront satisfaites. Pour satisfaire à (50) on peut supposer que $\cos\omega$ reste supérieur à un nombre positif, qu'on peut prendre aussi petit que l'on veut, on prend ensuite $r$ et $\frac{1}{\rho}$ assez petits pour que $\cos\omega + A$ reste supérieur à un nombre positif $h$ et que $k$ étant choisi arbitrairement l'inégalité (51) soit satisfaite.

On voit immédiatement que $z$ reste aussi petit que l'on veut, lorsque $\frac{1}{\rho}$ reste suffisamment petit; $z$ tend vers zéro, lorsque $\rho$ croît indéfiniment. Il en est donc de même pour $r$.

**56.** On peut citer, comme exemple d'équation différentielle du type que nous considérons, l'équation

$$y^2\,dx = \left[x(1 + ay) + x^{m+1}y^p + x^{m+1}y^{p+1}\left(a + \frac{p}{m}\right)\right]dy$$

dont l'intégrale est

$$x\sqrt[m]{1 - e^m e^{\frac{m}{y}}}\,y^{m(a+1)+p} = ce^{\frac{1}{y}}y^a.$$

On voit que, quelle que soit la constante $c$, $x$ tend vers zéro lorsque $y$ tend vers zéro, sa partie réelle étant positive et l'argument $\omega$ de $y$ tel que $\cos\omega$ ne tende pas vers zéro. Si la partie réelle de $a$ est positive, $\cos\omega$ peut tendre vers zéro. Dans tous les autres cas, si $\omega$ ne croît pas indéfiniment, $x$ ne tend pas vers zéro. Plus généralement, on peut considérer l'équa-

tion :

$$(52) \qquad y^{m+1}dx = [x(1 + ay^m) + x^n f(y)]dy,$$

$f$ étant soit un polynome en $y$, soit une fonction holomorphe pour $y = 0$.

On pourrait même prendre pour $f$ un développement contenant des puissances fractionnaires de $y$, la plupart des propriétés démontrées seraient encore vraies.

Examinons le cas particulier où $n = 0$ et $m = 1$. On obtient l'intégrale générale

$$(53) \qquad x = ce^{\frac{1}{y}}y^a + e^{\frac{1}{y}}y^a \int_{y_0}^{y} e^{\frac{1}{y}}y^{a-2}f(y)\,dy.$$

On vérifie facilement les propriétés énoncées pour l'équation générale.

Nous pouvons remarquer, en supposant que l'argument de $y$ ne croisse pas indéfiniment, que le second terme du deuxième membre de (53) peut se mettre sous la forme $\varphi(y) = c_0 e^{-\frac{1}{y}}y^a$; $c_0$ étant une constante et $\varphi(y)$ tendant vers zéro, de quelque façon que $y$ tende vers zéro. Cette démonstration se fait par les procédés que nous avons déjà employés pour évaluer une limite supérieure du module d'une intégrale. Il en résulte que, si l'on ne donne pas à $c$ la valeur $c_0$, $x$ croîtra indéfiniment lorsque $y$ tend vers zéro, sa partie réelle étant négative. Si l'on donne à $c$ la valeur $c_0$, $x$ tendra vers zéro de quelque façon que $y$ tende vers zéro. On aura ainsi une intégrale pour laquelle $y = 0$ ne sera pas un point essentiel. Cette intégrale coïncide avec l'intégrale holomorphe $x(y)$ lorsque celle-ci existe. Pour toutes les autres intégrales, $y = 0$ est un point essentiel.

Il serait facile de donner des formes particulières de $f(y)$ telles que l'intégrale de (52) s'obtienne en termes ne comportant plus de quadratures, mais cela revient, en somme, à considérer *a priori* des fonctions $x(y)$ satisfaisant à une équation différentielle de la forme (52).

Ainsi, on peut prendre l'équation à laquelle satisfait, quel que soit $c$,

$$x = ce^{\frac{1}{y}}y^a + g(y), \qquad g(0) = 0.$$

# DEUXIÈME PARTIE.

## ESSAI D'ÉTUDE DES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DANS LE VOISINAGE DE CONDITIONS INITIALES SINGULIÈRES.

### I. — *Recherche d'une catégorie d'intégrales.*

**37.** Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx = 0,$$

où X et Y sont des fonctions holomorphes et nulles pour $x = y = 0$, j'appellerai *intégrale régulière* passant par l'origine, une intégrale telle que $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro et qu'en même temps le rapport $\frac{y}{x^\mu}$, $\mu$ étant un nombre positif arbitraire, tende vers une limite finie ou infinie. Il peut, en effet, exister des intégrales telles que, pour une certaine valeur de $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ ne tende vers aucune limite. Nous pourrions considérer de même les caractéristiques régulières. Mais, dans cette seconde Partie, pour simplifier le langage, nous emploierons souvent le mot *intégrale* avec le sens que nous attachions au mot *caractéristique* dans la première Partie.

Pour rechercher les intégrales régulières, je me servirai des notions qui suivent, employées par M. Autonne dans la recherche des intégrales algébroïdes, notions qui sont pour la plupart employées dans l'étude des fonctions algébriques et qu'il m'a paru utile de compléter sur certains points. Nous avons

$$X = \Sigma A x^{\alpha-1} y^{\beta}, \qquad Y = \Sigma B x^{\alpha} y^{\beta-1},$$

$\Sigma$ et S désignant des sommes de termes analogues au terme écrit.

Remplaçons dans le premier membre de (1) $dx$ par $x$ et $dy$ par $y$, on a

$$\Sigma A x^{\alpha} y^{\beta} + \Sigma B x^{\alpha} y^{\beta}.$$

La valeur minimum de la somme $\alpha + \beta$ dans les divers termes de $\Sigma$ et de S sera désignée par $n + 1$ [1].

*Polygone figuratif.* — Je considère deux axes de coordonnées $O\alpha$ et $O\beta$. Pour fixer les idées, $O\beta$ sera dirigé vers la droite et $O\alpha$ perpendiculaire à $O\beta$ et dirigé vers le haut de la feuille. Le point d'abscisse $\beta$ et d'ordonnée $\alpha$ sera dit *point figuratif* d'un terme $x^\alpha y^\beta$, provenant soit de $\Sigma$ soit de S. Pour chaque valeur de $\alpha$, je ne considérerai parmi les termes de $\Sigma$ et de S que le terme $x^\alpha y^\beta$ où $\beta$ prend la plus petite valeur; ce terme peut se trouver d'ailleurs simultanément dans S et dans $\Sigma$. De même pour chaque valeur de $\beta$, je ne considérerai que le terme $x^\alpha y^\beta$ où $\alpha$ prend la plus petite valeur. J'aurai ainsi un nombre de points figuratifs au plus égal à $n + 1$.

Il est facile de trouver une ligne polygonale convexe ayant pour sommets quelques-uns de ces points, terminée par deux parallèles aux axes, et telle que les points figuratifs des termes considérés et *a fortiori* ceux des autres termes soient au-dessus de cette ligne. Cette ligne sera le polygone figuratif.

*Ordre du point singulier.* — L'ordonnée du point le plus bas du polygone sera 0 ou 1. Si elle était égale à 2, tous les termes de $SBx^\alpha y^\beta$ et de $\Sigma Ax^\alpha y^\beta$ contiendraient $x^2$ en facteur, X et Y seraient divisibles par $x$. Cette ordonnée minimum est égale à 1 si l'équation admet l'intégrale $x = 0$. L'abscisse $\beta$ du sommet le plus bas du polygone sera appelée *ordre en $y$ de l'équation*. En considérant de même le point d'abscisse minimum du polygone, l'ordonnée $\alpha$ de ce sommet sera l'ordre en $x$. Si l'on effectue un changement *linéaire* de variables, l'ordre en $x$ et l'ordre en $y$ peuvent changer. La plus petite des valeurs que puissent prendre ces ordres sera l'ordre du point singulier.

Les cas examinés dans la première Partie sont les seuls cas d'équations présentant un point singulier du premier ordre.

---

(1) Les dénominations de *polygone figuratif*, *ordre figuratif*, *équation trièdre*, *équation indicatrice*, ont été employées par M. Autonne dans le Mémoire déjà cité (*Journ. Éc. Polytech.*, 1897).

*Droite figurative.* — J'appellerai *droite de pente* $\mu$, une droite de coefficient angulaire $-\mu$, du plan $\beta O \alpha$.

La droite de pente $\mu$ qui laisse au-dessus d'elle tous les points figuratifs et contient, au moins, un sommet du polygone figuratif sera dite *droite figurative de pente* $\mu$. Si un point figuratif $\alpha, \beta$ est fourni à la fois par un terme $Ax^\alpha y^\beta$ de $\Sigma$ et un terme $Bx^\alpha y^\beta$ de S, la droite passant par ce point et dont la pente $\mu$ satisfait à la condition

$$\mu B + A = 0$$

sera dite *la tangente* au point $\alpha, \beta$. Cette tangente sera parallèle à $O\alpha$ si l'on a $B = 0$.

*Équation transformée.* — Remplaçons dans l'équation (1) $y$ par $vx^\mu$, $\mu$ étant une constante, $v$ une nouvelle variable, on obtient l'équation suivante qui sera appelée *équation transformée :*

$$(2) \qquad x\,dv\,\mathrm{S}Bx^{\alpha+\beta\mu}v^{\beta-1} + dx\,\Sigma(\mu B + A)x^{\alpha+\beta\mu}v^\beta = 0.$$

La puissance de $x$ qui est en facteur dans le premier membre s'obtiendra en cherchant la valeur minimum de $\alpha + \beta\mu$. Cette quantité est l'ordonnée à l'origine d'une droite $\mu$ passant par le point $\alpha, \beta$. Pour avoir la valeur minimum de $\alpha + \beta\mu$, il suffira de trouver par quels points du polygone figuratif passe une droite de pente $\mu$ laissant au-dessus d'elle le polygone figuratif. Cette droite, facile à obtenir graphiquement, est la droite figurative de pente $\mu$. Soit $m$ son ordonnée à l'origine. En divisant par $x^m$, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad x\left[\Sigma Bv^{\beta-1} + x^h F(x, v)\right]dv + \left[\Sigma(\mu B + A)v^\beta + x^k G(x, v)\right]dx = 0;$$

les deux signes $\Sigma$ ne s'étendent plus qu'aux termes ne contenant plus $x$ et qui proviennent des termes dont les points figuratifs sont sur la droite figurative de pente $\mu$. $h$ et $k$ sont des nombres positifs. F et G des fonctions holomorphes pour $x = 0$, $v = 0$.

58. *Classification des intégrales régulières.* — Étant donnée une

intégrale régulière $y(x)$, cinq cas différents peuvent se présenter :

1° Quel que soit $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ tend vers zéro. L'intégrale sera dite *d'ordre infini;*

2° Quel que soit le nombre positif $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ croît indéfiniment. L'intégrale sera *d'ordre nul;*

3° Pour une valeur de $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ tend vers une limite finie et différente de zéro. L'intégrale sera d'ordre fini $\mu$;

4° Pour une valeur de $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ tend vers zéro, mais croît indéfiniment pour toutes les valeurs supérieures de $\mu$. L'intégrale sera dite *intégrale d'ordre excédant* $\mu$. En posant $y = vx^\mu$, l'équation transformée admettra une intégrale d'ordre nul.

5° Pour une valeur de $\mu$, $\frac{y}{x^\mu}$ croît indéfiniment, mais tend vers zéro pour toutes les valeurs inférieures. L'intégrale sera dite *d'ordre déficient* $\mu$. L'équation transformée admettra une intégrale d'ordre infini. En permutant le rôle joué par $x$ et par $y$ nous ramènerons l'étude d'une intégrale $y(x)$, d'ordre déficient, à celle d'une intégrale $x(y)$ d'ordre excédant.

**39.** *Intégrales d'ordre infini.* — S'il y a des intégrales d'ordre infini, quelque grand que soit $\mu$, l'équation transformée par la substitution $y = vx^\mu$ aura des intégrales $v(x)$ tendant vers zéro avec $x$. Cherchons la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi.

1° Supposons que l'équation donnée n'admette pas l'intégrale $y = 0$, elle pourra s'écrire

$$\left[ax^p + x^{p+h} f(x) + y F(x, y)\right] dx$$
$$+ \left[bx^q + x^{q+h} g(x) + y G(x, y)\right] dx = 0,$$

$b$ n'étant pas nul. Formons l'équation transformée en prenant $\mu$ entier et supérieur à la pente des divers côtés du polygone figuratif.

La droite figurative de pente $\mu$ ne passera que par le sommet $\beta = 0$, $\alpha = q + 1$ fourni par le terme $bx^{q+1}$, provenant de la partie conte-

nant $dx$. L'équation transformée prend la forme

$$(4)\quad x^{q-r-1}\left[ax^p + x^{p+k}f(x) + vx^q F(x, v)\right]dv + \left[b + x^k G(x, v)\right]dx = 0,$$

le coefficient de $dv$ contenant certainement en facteur une puissance positive de $x$. Pour simplifier les notations, je désigne par $h$ et $k$ des nombres positifs que j'emploie en exposant et qui n'auront pas nécessairement dans une formule les mêmes valeurs que dans les formules précédentes. De même, $f(x)$, $g(x)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ seront des symboles désignant une fonction holomorphe, dans le voisinage des valeurs zéro des variables, le même symbole pouvant dans deux formules consécutives désigner deux fonctions différentes.

Si nous considérons l'équation (4) nous voyons que cette équation n'admet pas d'intégrale $v(x)$ tendant vers zéro avec $x$. Pour qu'il y ait des intégrales d'ordre infini, il faut que l'équation admette l'intégrale $y = 0$. Cette intégrale, $y = 0$, étant d'ordre infini, on peut dire que la condition est suffisante. Il peut être intéressant de se demander s'il y a d'autres intégrales d'ordre infini. Bien que je n'obtienne pas de résultats généraux, je vais passer en revue les cas qui peuvent se présenter. L'équation donnée peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\left[ax^p + x^{p+k}f(x) + yF(x, y)\right]dy\\ &\quad + y^q\left[bx^2 + x^{r+k}g(x) + yG(x, y)\right]dx = 0,\end{aligned}$$

$a$ et $b$ n'étant pas nuls. $\mu$ étant supérieur à la pente des divers côtés du polygone figuratif, le sommet par lequel passe la droite figurative de pente $\mu$ est fourni par le terme $ax^p y$, à moins que l'on ait $q = 1$ et $p > r + 1$, auquel cas ce sommet est fourni par le terme $bx^{r+1}y$.

Distinguons trois cas :

1° On n'a pas à la fois $q = 1$ et $p \geqq r + 1$; l'équation transformée peut s'écrire

$$(5)\qquad x\left[a + x^k F(x, v)\right]dv + v\left[\mu a + x^k G(x, v)\right]dx = 0;$$

2° On a

$$q = 1 \qquad \text{et} \qquad p = r + 1.$$

On a pour équation transformée

$$(6) \qquad x[a + x^{\delta} F(x, v)]dv - v[\mu a + b + x^{\delta} G(x, v)]dx = 0.$$

3° On a

$$q = 1 \qquad \text{et} \qquad p > r + 1 \qquad \text{ou} \qquad p = r + 1 + s.$$

On obtient

$$(7) \qquad x^{s+1}[a + x^{\delta} F(x, v)]dv - v[b + x^{s} G(x, v)]dx = 0.$$

1° Dans le premier cas, en prenant $\mu$ entier et aussi grand que l'on veut, on obtient une équation pour laquelle $x = 0$, $v = 0$ sera, en général, un foyer; nous avons vu qu'il y a une infinité de caractéristiques pour lesquelles $v$ tend vers zéro avec $x$. En laissant de côté le cas où l'on aurait un centre, on peut donc dire qu'il y a des intégrales d'ordre supérieur à n'importe quel nombre $\mu$, mais cela ne prouve pas l'existence d'intégrales d'ordre infini. Je ne puis affirmer cette existence, bien que, pour les exemples cités à propos des foyers, ces intégrales existent.

2° Dans le second cas, si le rapport $\frac{\mu a + b}{a}$, c'est-à-dire $\frac{b}{a}$ est imaginaire, on montre sans peine que les caractéristiques d'ordre infini existent. Elles sont obtenues, bien entendu, en faisant croître indéfiniment l'argument de $x$, et cela suivant une loi convenable. Si le rapport $\frac{\mu a + b}{a}$ est réel, on doit le supposer positif puisque $\mu$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. On est dans le cas d'un col si $\frac{b}{a}$ est irrationnel, d'un foyer ou d'un centre si $\frac{b}{a}$ est rationnel. Dans le cas d'un foyer, les conclusions de 1° sont valables. Si l'on a un col nous ne pouvons affirmer ou nier l'existence d'intégrales de (6) et à plus forte raison nous prononcer sur les

intégrales d'ordre infini. Si cependant on peut, pour l'équation (6), établir l'existence d'un développement

$$x^{ga+b}v^{a}\Pi(x, v) = \text{const.}$$

fournissant l'intégrale générale, fait qui se produira dans le cas d'un centre, il n'y a pas d'intégrale de (6) tendant vers zéro avec $x$, par suite, pas d'intégrale d'ordre infini.

3° Nous avons étudié une équation de la forme (7). Il résulte de cette étude que l'équation en $v$ admet, pour $x$ tendant vers zéro à l'intérieur d'un certain secteur, une infinité d'intégrales d'ordre infini.

Le seul cas général où nous puissions affirmer l'existence d'une infinité d'intégrales d'ordre infini est 3°. On peut dire qu'*il y a une infinité d'intégrales d'ordre infini, si* X *coefficient de* $dx$ *contient* $y$ *en facteur et non* $y^2$, *et si de plus l'ordre en* $x$ *de* $y$Y *est supérieur à l'ordre en* $x$ *de* $x$X, *ou, ce qui revient au même, si le point le plus haut du polygone figuratif est fourni par un terme de* $y$Y *et non par un terme de* $x$X.

**40.** *Intégrales d'ordre nul.* — En permutant le rôle de $x$ et de $y$, nous aurons une discussion analogue à celle qui vient d'être faite. Pour qu'il existe des intégrales d'ordre nul, il faut que l'équation donnée admette l'intégrale $x = 0$. *Il existera une infinité d'intégrales d'ordre nul si* Y *contient* $x$ *en facteur et non* $x^2$, *et si le point le plus à droite du polygone figuratif est fourni par un terme de* $x$X *et non par un terme de* $y$Y.

**41.** *Intégrales d'ordre fini.* — Cherchons s'il y a des intégrales d'un ordre déterminé $\mu$. Deux cas peuvent se présenter, suivant que la droite figurative de pente $\mu$ ne contient qu'un sommet du polygone figuratif ou bien coïncide avec un côté. Examinons successivement les deux cas :

*Intégrales fournies par une droite figurative ne passant que par un sommet.*

Soient $\alpha\beta$ les coordonnées du sommet considéré. L'équation trans-

formée (3) prend la forme

$$(8)\quad x\left[\mathrm{B}v^{\mu-1}+v^{k}\mathrm{F}_1(x,v)\right]v'+\left[\mu\mathrm{B}+\mathrm{A}+x^{h}\mathrm{G}_1(x,v)\right]dx=0.$$

$\mathrm{F}_1$ et $\mathrm{G}_1$ sont des fonctions holomorphes de $v$, mais contiennent, en même temps que des puissances de $x$, des puissances de $x^{\mu}$, $\mu$ étant égal soit à $\mu-1$ soit à $1-\mu$ suivant que l'une ou l'autre de ces quantités est positive; $k$ et $h$ peuvent être inférieurs à un.

Si l'on a $\mu\mathrm{B}+\mathrm{A}\neq 0$, l'équation considérée n'admet pas d'intégrale $v(x)$ tendant, pour $x=0$, vers une limite finie et différente de zéro. Il n'y a pas d'intégrales d'ordre $\mu$. Il ne peut y avoir que des intégrales d'ordre excédant $\mu$ ou des intégrales d'ordre déficient. L'étude de ces intégrales, même dans le cas où $\mu$ est rationnel, ne me semble guère abordable.

Si l'on a $\mu\mathrm{B}+\mathrm{A}=0$, on peut remarquer que l'on aura $\mathrm{B}\neq 0$. En posant $x=z^m$ on pourra toujours prendre $m$ assez grand pour que $z^{km}$ soit supérieur à un. On pourra diviser les deux membres de (8) par $z^m$ et l'on aura

$$\left[\mathrm{B}v^{\mu-1}+\mathrm{F}_1(z,v)\right]dv+\mathrm{G}_1(z,v)\,v\,dz=0.$$

$\mathrm{F}_1$ et $\mathrm{G}_1$ sont des fonctions holomorphes de $v$, $z$, et $z^{m\nu}$, nulles pour $z=0$.

Prenant arbitrairement $v_0$, on aura une intégrale qui, lorsque $x$ tend vers zéro, tendra vers $v_0$ [1]. Nous pouvons remarquer que cette équation n'admet pas d'intégrales d'ordre nul, car elle n'admet pas l'intégrale $x=0$. Il n'y a donc pas d'intégrale d'ordre excédant $\mu$. En changeant le rôle de $x$ et de $y$ on montrerait qu'il n'y a pas non plus d'intégrale d'ordre déficient $\mu$.

*Pour qu'il y ait des intégrales d'ordre $\mu$, [illegible] tout la pente d'aucun côté du polygone, il faut et il suffit que la droite figurative [illegible] pente $\mu$ coïncide avec la tangente en un sommet du polygone figurative. Il y a alors*

[1] On démontre facilement qu'on peut obtenir $v$, sous forme d'un développement, suivant les puissances de $x$, de [illegible]

*une infinité d'intégrales d'ordre $\mu$; elles sont algébroïdes si $\mu$ est rationnel.*

On peut encore énoncer le théorème sous la forme suivante : *Si la tangente en un sommet du polygone figuratif est tout entière au-dessous de ce polygone, en désignant par $\mu$ la pente de cette tangente, on aura une infinité d'intégrales d'ordre $\mu$.*

Ces intégrales sont algébroïdes si $\mu$ est rationnel; mais elles pourront être de degré $\mu$ irrationnel à la différence des intégrales que nous allons étudier.

**42.** *Intégrales fournies par un côté du polygone figuratif.* Je désigne par $\alpha_i, \beta_i$ et $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ les coordonnées des deux extrémités du côté; $\alpha_j \beta_j$ seront les coordonnées d'un point figuratif situé sur le côté. On a par hypothèse

$$\beta_i < \beta_j \qquad < \beta_{i+1}.$$

$$(9) \qquad \alpha_i + \mu\beta_i = \alpha_j + \mu\beta_j = \ldots = \alpha_{i+1} + \mu\beta_{i+1}.$$

On en conclut que $\mu$ est rationnel, $\mu = \frac{p}{q}$. L'équation transformée peut s'écrire

$$v[B_i v^{\beta_i} + \Sigma B_j v^{\beta_j} + B_{i+1} v^{\beta_{i+1}} + x^\alpha F(v, x)]dv + [v^\beta \varphi(v) + x^\alpha G(x, v)]dx = 0.$$

En posant

$$(9') \qquad \varphi(v) = A_i + \mu B_i + \Sigma (A_j + \mu B_j) v^{\beta_j - \beta_i} + (A_{i+1} + \mu B_{i+1}) v^{\beta_{i+1} - \beta_i}.$$

Des égalités (9) on déduit sans peine que les différences $\beta_j - \beta_i$; $\beta_{i+1} - \beta_i$ sont des multiples de $q$; $\varphi(v)$ ne contient que $v^q$.

La limite vers laquelle tendra, lorsque $x$ tend vers zéro, une intégrale $v(x)$ d'ordre $\mu$ devra satisfaire à l'équation $\varphi(u) = 0$. J'appellerai, avec M. Autonne, cette équation, *équation indicatrice*. Soit $a_1$ une racine de cette équation; en posant

$$x = x_1^q, \qquad v = (a_1 + y_1) v_1^q, \qquad v = a_1 + y_1.$$

on obtient une équation qu'on peut encore appeler *équation transformée*.

Si $a_1$ est une racine simple de l'indicatrice, l'équation transformée peut s'écrire

$$x_1 X_1(x_1, y_1)\, dy_1 + [\nu y_1 + y_1^2 f(y_1) + x_1 F(x_1, y_1)]\, dx_1 = 0,$$

$\nu$ étant une constante; nous obtenons une équation ayant un point singulier du premier ordre.

Si $a_1$ est une racine multiple d'ordre $n_1$ de l'indicatrice, l'équation transformée sera

$$(10) \qquad x_1 X_1(x_1, y_1)\, dy_1 - [y_1 + y_1^{n_1+1} f(y_1) + x_1 F(x_1, y_1)]\, dx_1 = 0.$$

Si l'on a $X_1(0, 0) \neq 0$ nous obtiendrons encore une équation ayant un point singulier du premier ordre et l'équation pourra s'écrire

$$x_1 dy_1 + [\nu y_1^2 + y_1^{n_1+1} f(y_1) + x_1 F(x_1, y_1)]\, dx_1 = 0.$$

Dans les autres cas, on aura un point singulier d'ordre supérieur à un. Remarquons encore que l'ordre en $y_1$ de $X_1(x_1, y_1)$ peut être supérieur ou inférieur à $n_1$. Si cet ordre est inférieur à $n_1$ nous devons remarquer que l'équation en $x_1$ et $y_1$ admet une infinité d'intégrales d'ordre nul (§ **39**). Si l'équation transformée a un point singulier d'ordre supérieur à un, nous opérons sur elle comme sur l'équation en $x$ et en $y$. Nous chercherons les intégrales régulières de cette nouvelle équation. Nous chercherons particulièrement les intégrales régulières d'ordre $\mu$ et nous ne nous occuperons des intégrales d'ordre infini ou d'ordre nul, des intégrales excédantes ou déficientes, qu'autant qu'elles se présenteront à nous d'après les remarques déjà faites. Si une racine multiple d'une nouvelle indicatrice nous fournit une nouvelle équation transformée, ayant un point singulier d'ordre supérieur à un, nous opérerons encore sur la nouvelle équation comme sur l'équation primitive. On sait qu'on *finira*

*ainsi par obtenir des équations ayant un point singulier du premier ordre;* nous démontrerons du reste ce fait. Dans cette suite de transformations nous serons obligé de renoncer à la recherche des intégrales de [illegible] qui ne fourniraient pas des intégrales régulières des équations transformées *intermédiaires*. Nous serons même, dans beaucoup de cas, obligé de renoncer à la recherche des intégrales qui ne fourniraient pas des intégrales régulières d'ordre fini des diverses équations *intermédiaires*. Nous pouvons dire : *Par ces transformations nous obtenons toutes les intégrales régulières d'ordre fini qui fournissent des intégrales régulières d'ordre fini des diverses équations transformées, que nous employons dans leur recherche.* Les intégrales algébroïdes de l'équation donnée font partie de cette catégorie d'intégrales régulières. *Nous obtiendrons donc, comme cas particulier de cette recherche, les intégrales algébroïdes.*

**43.** Avant de montrer que la réduction au premier ordre peut toujours s'effectuer, et d'examiner ensuite diverses catégories d'intégrales d'ordre fini qu'on obtient, je vais examiner diverses particularités qui peuvent se présenter.

L'indicatrice $\varphi(v) = 0$, $(9')$, admet $\beta_{i+1} - \beta_i$ racines égales ou inégales, mais non nulles en général. *Il y a exception si l'on a* $A_i + \mu B_i = 0$, *c'est-à-dire si la tangente au sommet* $\alpha_i, \beta_i$, *extrémité supérieure du côté considéré du polygone, coïncide avec ce côté.* S'il en est ainsi l'équation transformée en $v$ et $x$ peut s'écrire, $B_i$ n'étant pas nul

$$x\left[B_i v^{\beta_i - 1} + v^{\beta_i} f(v) + x^{\lambda} F(x, v)\right] dv - \left[v^{\beta_i + 1} g(v) + x^{\lambda} G(x, v)\right] dx = 0.$$

On peut supposer que dans cette équation, on a remplacé $x$ par $x^q$ de manière à éviter les puissances fractionnaires. On voit, d'après la remarque faite à propos des intégrales d'ordre nul (§ **10**), que cette équation admet une infinité d'intégrales $v(x)$ tendant vers zéro avec $x$ et d'ordre nul. *L'équation primitive admettra une infinité d'intégrales d'ordre excédant* $\mu$. De même *si la tangente à l'extrémité inférieure du côté considéré coïncide avec ce côté, l'équation admet une infinité d'intégrales d'ordre*

*déficient* $y$. Pour le démontrer, il suffit de permuter le rôle de $x$ et de $y$ et de s'appuyer sur le résultat précédent.

Un autre cas plus particulier est celui où $\varphi(v)$ est identiquement nul.

On voit en remplaçant $x$ par $x^{\beta}$ de manière à éviter les exposants fractionnaires qu'on obtient l'équation

$$(11) \qquad \left[\sum B v^{\beta-1} + x F(x, v)\right] dv - G(x, v)\, dv = 0.$$

$\Sigma$ s'étend à tous les termes dont les points figuratifs sont sur le côté considéré du polygone et ce $\Sigma$ n'est pas identiquement nul, car, $\varphi(v)$ étant identiquement nul, si tous les B étaient nuls, tous les A seraient aussi nuls.

L'équation (11) admet une infinité d'intégrales holomorphes tendant vers une valeur arbitraire $v_0$ lorsque $x$ tend vers zéro. Ceci à condition toutefois qu'on n'ait pas $\Sigma B v_0^{\beta-1} = 0$, et $G(0, v_0) = 0$. L'étude des intégrales tendant vers ces valeurs exceptionnelles revient à l'étude de points singuliers d'équations différentielles.

Ce qui vient d'être dit pour un côté du polygone est vrai pour les côtés extrêmes. Mentionnons cependant les particularités qui peuvent se présenter pour le côté supérieur. Si $y$ n'est pas en facteur dans X, l'expression $x$X et $y$Y, dont les termes nous ont fourni les points figuratifs, contiendra un terme où $x$ entre seul. L'extrémité supérieure du polygone aura pour coordonnées $\beta_e = 0$, $\alpha_e = n$ ; on aura $B_e = 0$ et $A_e \neq 0$ ; on ne pourra avoir $A_e + \mu B_e = 0$. Il ne pourra y avoir une infinité d'intégrales algébroïdes comme dans le cas précédent. Le degré de l'indicatrice relative à ce côté ne s'abaisse pas. Si $y$ est en facteur dans X, l'extrémité supérieure du polygone sera $\beta_e = 1$, $\alpha_e = n - 1$. L'équation transformée peut s'écrire

$$x\left[B_e + \varphi(v) - x F(x, v)\right] dv - v\left[A_e + \mu B_e - v g(v) - x G(x, v)\right] = 0.$$

$A_e$ et $B_e$ ne sont pas nuls simultanément. On a donc une équation à point singulier du premier ordre, tout à fait analogue à l'équation (3) ou

n° 5 (première Partie). Cette équation peut, outre l'intégrale $y = 0$, fournir soit des intégrales d'ordre excédant, soit des intégrales d'ordre infini, soit encore des intégrales d'ordre fini si la tangente au sommet extrême du polygone laisse celui-ci au-dessus d'elle.

Des remarques analogues valent pour le côté inférieur du polygone. Si l'équation primitive n'admet pas l'intégrale $x = 0$, l'indicatrice relative à ce côté n'a pas de racines infinies. Si l'équation primitive admet l'intégrale $x = 0$, en posant $x = y^{\frac{q}{p}} v$, ou mieux $x = y_1^q x$, $y = y_1^p$, on obtient une équation soit de la forme (3), soit de la forme (5). Elle fournit soit des intégrales déficientes, soit des intégrales d'ordre nul, soit des intégrales d'ordre inférieur à $\frac{p}{q}$ toujours pour l'équation primitive.

On peut donc conclure :

1° *Si l'équation indicatrice relative à un côté de pente $\mu$ du polygone figuratif a un nombre de racines finies et non nulles, inférieur à la différence des abscisses de ses deux extrémités, ou, ce qui revient au même, si les tangentes à l'une ou à l'autre des extrémités du côté coïncident avec ce côté, sans qu'il en soit de même des tangentes aux autres points figuratifs situés sur le côté, l'équation a une infinité d'intégrales, d'ordre excédant si la tangente à l'extrémité supérieure coïncide avec le côté, d'ordre déficient si c'est la tangente à l'extrémité inférieure qui coïncide avec le côté. Les deux circonstances peuvent se produire simultanément.*

2° *Si l'équation indicatrice est une identité, c'est-à-dire si les tangentes aux divers points figuratifs situés sur le côté de pente $\mu$ coïncident toutes avec ce côté, l'équation* (1) *a une infinité d'intégrales algébroïdes d'ordre $\mu$.*

**44.** Montrons que, en opérant sur les équations transformées successives comme nous avons opéré sur l'équation primitive, on arrivera à un point singulier du premier ordre. En se reportant à l'équation (10), on voit que, à une racine multiple d'ordre $n_1$ d'une indicatrice, correspond

une équation qui a un point singulier au plus d'ordre $n_1$. D'autre part, la somme des degrés des diverses indicatrices relatives aux divers côtés du polygone est au plus égale à l'ordre en $y$ de l'équation. En effet, désignons par $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_e$ les abscisses des divers sommets du polygone figuratif. L'indicatrice relative au côté $\beta_i, \beta_{i+1}$ étant de degré au plus égal à $\beta_{i+1} - \beta_i$, la somme des degrés sera au plus $\beta_e - \beta_0$; c'est-à-dire au plus $\beta_e$. Enfin $\mu = \frac{p}{q}$ désignant la pente d'un côté, l'indicatrice ne contient que $v^q$ et ne saurait avoir toutes ses racines égales que si l'on a $q = 1$. On conclut de là que le degré des points singuliers des équations successives ira en s'abaissant, à moins que, dans les changements de variables successifs $[x = x_1^{\mu}, y = y_1, x = x_1]$, on ne finisse par avoir toujours $q = 1$. Je dis que, même s'il en est ainsi, on finira par obtenir un point singulier du premier ordre. Nous pourrons supposer pour la démonstration que c'est à partir de l'équation primitive que l'on a $q = 1$ et que l'on peut conserver la variable $x$. Les changements de variables successifs que l'on fait sur $y_1$, $y_2$, ... reviennent alors à un changement de la forme

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^{n+1} u.$$

Nous pouvons ramener ce changement aux deux changements successifs

$$y = \varphi(x) + z, \qquad z = u x^{n+1}.$$

Effectuons le premier changement; on a

$$Y[x, \varphi(x) + z]\,dz + X[x, \varphi(x) + z]\,\varphi'(x) - Y[x, \varphi(x) + z]\,dx = 0.$$

On montrera, en raisonnant comme dans un cas analogue (§ **30**), et supposant que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ n'aient pas de facteur commun, que, de quelque façon qu'on détermine les termes successifs de $\varphi(x)$ en nombre illimité, l'ordre de l'une des quantités

$$Y[x, \varphi(x), v] \quad \text{ou} \quad \varphi'(x)\,Y[x, \varphi(x)] + X[x, \varphi(x)]$$

finit par rester constant.

Je dis que, dans les changements de variables que nous effectuons, l'ordre de

$$\varphi'(x)\,Y[x,\varphi(x)]+X[x,\varphi(x)]$$

ne peut rester constant.

En effet, soit $h$ l'ordre de $Y[x,\varphi(x)]$ et soit $k$ l'ordre de l'autre quantité; $m$ pouvant être pris aussi grand que l'on veut, on voit que l'équation en $x$ et $u$ se met sous la forme

$$x^{h-k}A(x,u)\,du+[B+xB'(x,u)]\,dx=0.$$

Après avoir divisé par $x^k$, on obtient une équation qui n'a plus de point singulier, ce qui ne peut être puisque les équations transformées successives admettent toutes pour valeurs singulières les valeurs nulles des deux variables.

Donc, $m$ croissant indéfiniment, $h$ finira par rester constant, $k$ deviendra aussi grand qu'on voudra. L'équation en $u$ et $x$ pourra s'écrire

$$x^{h'+m}A(x,u)\,du+[x^{h'}f(u)+x^{h'+1}B(x,u)]\,dx=0,$$

$h'$ étant au plus égal à $h$, $A(0,0)$ n'étant pas nul. L'équation étant une équation transformée ayant $x=y=0$ pour point singulier, on aura

$$h'+m\geqq k+1 \qquad \text{et} \qquad f(0)=0$$

Montrons que le polynome $f(u)$ sera du premier degré si $m$ est assez grand. Soit $r$ son degré. D'après les formules de transformations, $u$ n'entre dans l'équation que par le produit $ux^m$. On aura donc $k\geqq rm$, d'où l'on conclut $h'+m>rm$. En prenant $m$ supérieur à $h$, on aura $r<2$. En divisant par $x_h$, on aura une équation à point singulier du premier ordre.

*Nous arriverons donc toujours, par la suite de transformations indiquées, à des équations ayant chacune un point singulier du premier ordre.*

**45.** Énumérons les diverses formes d'équations à point singulier du premier ordre, qu'on finira par obtenir pour équations transformées. Les variables seront $z$ et $t$ ; $z = 0$ :

1°

$$(12) \qquad z\,dt + [\mu t + t^2 f(t) + zF(z, t)]\,dz = 0, \qquad \text{avec} \qquad \mu \neq 0 :$$

2°

$$(13) \qquad z\,dt + [\mu t + t^{2+\lambda} f(t) + zF(z, t)]\,dz = 0 :$$

3°

$$(14) \qquad zG(z, t)\,dt + [\mu t + t^2 f(t) + zF(z, t)]\,dz = 0,$$

$G(0, 0)$ étant nul.

Ce sont des cas particuliers des équations examinées dans la première Partie. Il me paraît peu utile d'énumérer de nouveau les résultats trouvés à ce propos. Je remarquerai seulement que (13) et (14) nous donnent une infinité d'intégrales $t(z)$ non holomorphes; (13) nous donnera toujours une intégrale holomorphe $t(z)$ ; (14) nous fournira un développement $t(z)$ satisfaisant formellement à l'équation, mais en général ce développement ne sera pas convergent; (12) donne une intégrale holomorphe, à moins que $\mu$ ne soit un entier négatif, et peut fournir une infinité d'autres intégrales qui, lorsque $\mu$ est rationnel et négatif, sont algébroïdes.

**46.** *Intégrales normales.* — L'équation (12) admet toujours, si $\mu$ n'est pas un entier négatif, une intégrale holomorphe autre que $z = 0$.

Supposons qu'elle n'admette pas d'autre intégrale holomorphe. L'intégrale algébroïde de l'équation primitive fournie par cette intégrale holomorphe sera dite *intégrale normale*.

*Une intégrale normale est une intégrale algébroïde de* (1) *fournie par une équation transformée de la forme*

$$z\,dt + (-\lambda t, \ldots)\,dz = 0,$$

*où $\lambda$ n'est ni nul, ni un entier positif.*

Une pareille intégrale pourra s'exprimer par la formule

$$y = a_1 x_1^{q_1} + a_2 x_2^{q_2} + a_3 x_3^{q_3} + \ldots + x_n^{q_n} a_n + t,$$

en posant

$$x = x_1, \qquad x_2 = x_1^{q_1}, \qquad \ldots \qquad x_{n-1} = x_n^{q_n} = z,$$

$t$ désignant l'intégrale holomorphe de (12), pouvant se développer suivant les puissances de $z$. En posant

$$s = q_1 q_2 \ldots q_n \qquad \text{et} \qquad x_n = z,$$

on aura

$$y = a_1 z^{s_1} + a_2 z^{s_2} + a_3 z^{s_3} + \ldots + a_n z^{s_n} + \ldots \qquad \text{et} \qquad x = z^s,$$

ce développement étant convergent pour $z$ suffisamment petit en module.

Comme il est facile de voir qu'un, au moins, des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ est premier avec $s$, on en conclut que les $s$ intégrales formant un cycle, que l'on obtient en remplaçant $z$ par $x^{\frac{1}{s}}$, satisfont à l'équation différentielle. On peut former un développement holomorphe $\varphi(y, x)$ qui sera d'ordre $s$ en $y$ et d'ordre $s_1$ en $x$, et qui, décomposé en facteurs, nous fournira les intégrales du cycle considéré. En désignant par $q_1$ le plus petit des deux nombres $s$ et $s_1$, je dirai que $\varphi(y, x) = 0$ fournit une intégrale algébroïde d'ordre de multiplicité $q$, ou encore qu'elle fournit $q$ intégrales normales.

Avec cette convention, on peut dire que l'*équation* (1), *où* X *et* Y *sont d'ordre* $n$, *admet au plus* $n+1$ *intégrales normales*. Pour le montrer, remarquons que l'ordre de multiplicité d'une intégrale, $\varphi(y, x) = 0$, n'est pas changé par une substitution linéaire et que, par cette substitution, une intégrale normale reste une intégrale normale. En faisant une substitution telle que l'équation n'admette ni l'intégrale $x = 0$, ni l'intégrale $y = 0$, les abscisses des deux extrémités du polygone figuratif seront respectivement $n+1$ et 0. La somme des degrés des diverses indicatrices sera

$n+1$. Si ces indicatrices n'ont que des racines simples, chaque racine, ainsi que nous l'avons vu au § **42**, fournira au plus une intégrale normale.

Si l'on considère une racine d'ordre $n_1$ d'une équation indicatrice, l'équation transformée correspondante aura un point singulier de degré au plus égal à $n_1$. La somme des degrés des diverses indicatrices relatives à cette équation transformée sera égale au plus à $n_1$. (Il y a lieu pour cette équation de faire un changement de variable tel que l'équation n'admette plus l'intégrale $y_1 = 0$, si elle existe, afin de pouvoir considérer comme intégrale normale l'intégrale $y$ correspondante; mais il n'y a pas lieu de faire un changement de variables tel que l'équation transformée qui admet toujours l'intégrale $x_1 = 0$ n'admette plus cette intégrale. En effet, $x_1 = 0$ ne fournit pas d'intégrale de l'équation donnée.) Nous pouvons dire que la somme des degrés des diverses indicatrices des diverses équations transformées est au plus égale à $n+1$. Comme on finira par arriver à des équations transformées dont les indicatrices n'auront que des racines simples et dont chacune fournira au plus une intégrale normale, le nombre de celles-ci sera au plus égal à $n+1$. Il est facile de former des exemples où il y a $n-1$ intégrales normales. *En général, l'équation* (1) *où les termes de degré minimum sont de degré n aura* $n+1$ *intégrales normales.*

Enfin, il résulte de la discussion qui vient d'être faite le théorème suivant : *Toutes les fois que le nombre des intégrales normales sera inférieur à* $n+1$, *nous aurons une infinité d'intégrales régulières qui, en général, ne seront pas holomorphes.*

**47.** En général, il y aura $n+1$ intégrales algébroïdes qui seront en même temps des intégrales normales. Mais, dans des cas particuliers, il y a des intégrales algébroïdes qui ne sont pas des intégrales normales; par exemple, si l'on arrive à une équation de la forme (13) l'intégrale holomorphe $t(z)$ de cette équation fournira une intégrale algébroïde de (1), mais non une intégrale normale. Le raisonnement du paragraphe précédent montre que, si l'on considère les intégrales algébroïdes $y(x)$ de l'équation (1), le nombre total des intégrales algébroïdes est, en général,

$n+1$ : s'il y en a plus de $n+1$, il y en a une infinité. Les seuls cas où il puisse y avoir une infinité d'intégrales algébroïdes sont les cas signalés (§ 41 et § 43) et le cas où dans (12) $\mu$ est négatif et rationnel. Dans ce dernier cas ces intégrales existent certainement, si $\mu$ n'est pas entier. Si $\mu$ est un entier ($\mu = -p$), il faut, pour qu'elles existent, qu'il y ait une relation entre les coefficients de (12). On sait qu'on peut trouver cette relation en formant l'*équation transformée* par la substitution

$$t = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + z^{n-1} a_{n-1} + u,$$

de manière à être ramené au cas de $p = 1$. D'après cela, on voit facilement qu'on peut résumer tous les cas en disant : *Il y a une infinité d'intégrales algébroïdes dans les deux cas suivants, et seulement dans ces deux cas :*

1° *En un sommet du polygone figuratif de l'équation donnée, ou d'une des transformées, la tangente a une pente rationnelle, laisse au-dessus d'elle tout le polygone et ne coïncide pas avec un côté du polygone.*

2° *Les tangentes aux différents points d'un côté du polygone figuratif, de l'équation ou d'une des équations transformées coïncident avec ce côté.*

## II. — *Recherche dans certains cas de l'intégrale générale d'une équation différentielle dans le voisinage de valeurs singulières.*

**43.** Par analogie avec ce qui a lieu, en général, pour un point singulier du premier ordre, on peut chercher si, dans le voisinage d'un point singulier d'ordre supérieur, l'intégrale générale d'une équation différentielle ne peut se mettre sous la forme

$$(15) \qquad e^{h(x,y)} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \ldots A_i^{\alpha_i} \ldots A_n^{\alpha_n} = \text{const.},$$

$h(x, y)$ étant une fonction holomorphe, les A des facteurs qui, égalés à zéro, fournissent des intégrales algébroïdes de l'équation donnée que nous écrirons en supposant les termes de degré minimum de X et Y de

degré $n$ :

$$(16) \qquad Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx = 0.$$

Il est évident que des classes étendues d'équations différentielles admettent une intégrale générale de cette forme, puisqu'en différentiant la relation (15) on trouve une équation différentielle ayant un point singulier d'ordre supérieur à un. Mais nous allons voir, qu'en général, l'intégrale n'est pas susceptible d'être mise sous cette forme. Nous laisserons de côté le cas exceptionnel où l'équation (16) a une infinité d'intégrales algébroïdes. Nous devons donc prendre au plus dans (15) $n+1$ facteurs A. Si quelques-uns de ces facteurs étaient de la forme

$$y - a_1 x^{\frac{p_1}{s}} - a_2 x^{\frac{p_2}{s}} \quad \text{avec} \quad \frac{p_1}{s} < 1,$$

nous ne compterions les $s$ facteurs analogues, d'après ce qui a été dit § **46**, que pour $p_1$ facteurs. D'autre part, nous ne devons pas prendre dans (15) moins de $n+1$ facteurs A, si nous voulons, en différentiant, obtenir une équation pouvant être identifiée à (16), dans laquelle nous supposerons que Y et X n'aient pas un facteur commun $g(x, y)$ holomorphe et nul pour $x = y = 0$. Remarquons enfin, qu'en différentiant la relation (15), on obtient une équation

$$(17) \qquad Y_1(x, y)\,dy + X_1(x, y)\,dx = 0,$$

et l'on doit avoir

$$X_1(x, y) = [k + M(x, y)]\,X(x, y); \quad Y_1(x, y) = [k + M(x, y)]\,Y(x, y),$$

$M(x, y)$ étant holomorphe et nul pour $x = y = 0$. Nous pourrons toujours diviser $h(x, y)$ par la constante $k$, ainsi que les divers exposants $\lambda$, dans la formule (15), et supposer, par suite, que l'on a, si l'intégrale peut

se mettre sous la forme indiquée,

$$(18)\qquad \begin{aligned} (\mathrm{X}_1)_{x,y} &= [1+\mathrm{M}(x,y)]\,\mathrm{N}(x,y), \\ (\mathrm{Y}_1)_{x,y} &= [1+\mathrm{M}(x,y)]\,\mathrm{Y}(x,y). \end{aligned}$$

**49.** Proposons-nous de déterminer les valeurs possibles des exposants $\lambda$, telles qu'on puisse avoir les relations (18).

De ce que nous avons vu dans le Chapitre précédent, il résulte qu'on peut trouver un entier $m$, tel qu'en remplaçant $x$ par $x^m$ toutes les intégrales algébroïdes de l'équation deviennent des intégrales holomorphes. Nous poserons

$$\mathrm{A}_i = y - a_i^1 x - a_i^2 x^2 \ldots a_i^m x^m \ldots = y + \varphi_i(x).$$

En différentiant (15) on obtient

$$\begin{aligned} &h_i\,dx + h'_i\,dy = \mathrm{A}_0\,\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n \\ &\quad + \sum \lambda_i \left[dy + \varphi'_i(x)\,dx\right] \mathrm{A}_0\,\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{i-1}\,\mathrm{A}_{i+1} \ldots \mathrm{A}_n = 0. \end{aligned}$$

Supposons que le coefficient $a_i^m$ de $\mathrm{A}_i$ ne soit pas égal au coefficient de $x^m$ dans un autre des facteurs A, les coefficients précédents $a_i^{m-1}$, etc. étant égaux aux coefficients correspondants d'autres facteurs. Si je pose :

$$(19)\qquad y = a_i^1 x + a_i^2 x^2 + \ldots + (a_i^m + v)\,x^m,$$

en remplaçant $y$ par cette expression dans (17), divisant par la puissance de $x$ qui se trouve en facteur dans tous les termes et ne considérant que les termes de degré minimum en $v$ et en $x$, j'obtiens une équation que je puis former plus simplement en faisant la substitution (19) dans le premier membre de (15) et en différentiant ce premier membre. Supposons que dans ces conditions on ait

$$\mathrm{A}_i = x^{m_j}(b_j + \ldots) + v x^m; \qquad b_j \neq 0; \qquad m_j < m.$$

On a

$$\mathrm{A}_i = a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + v x^m.$$

Si l'on pose $c_i = \Sigma m_j \lambda_j$, où $j$ prend les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ et où l'on suppose $m_i$ égal à $m$, on aura

$$(20) \quad b_0 \ldots b_{i-1} b_{i+1} \ldots b_n x \left[ \lambda_i + F(x, v) \right] dv + \left[ vc_i + xG(x, v) \right] dx = 0,$$

$F(0, 0)$ étant nul.

Si je fais la même substitution (19) dans l'équation (16), j'obtiendrai (20) au facteur près $1 - M$. Les termes de degré minimum seront donc identiques dans les deux cas. Il en résulte que l'on a $c_i \neq 0$, car si l'on avait $c_i = 0$ (20) et, de même, (16) aurait une infinité d'intégrales holomorphes. Il en résulte encore que l'intégrale $A_i = 0$ est une intégrale normale, puisque nous supposons qu'il n'y ait pas une infinité d'intégrales algébroïdes. En identifiant ensuite les coefficients des termes $x\,dv$ dans les deux résultats de substitution, nous avons la valeur de

$$b_1 \ldots b_{i-1} b_{i+1} \ldots b_n \lambda_i$$

et, par suite, la valeur de $\lambda_i$, les coefficients $a_0, a_1, a_i, \ldots, a_n$ pouvant être supposés calculés à l'avance.

Nous avons, pour simplifier les notations, rendu holomorphes toutes les intégrales algébroïdes. Cela n'est nullement nécessaire pour le calcul des $\lambda$. En effet, si l'on a une variable $x_1$, liée à $x$ par la relation $x^s = x_1$, nous obtiendrons les termes de degré minimum de l'équation transformée, qui nous fournit l'intégrale $A_i$, en remplaçant dans (20) $x$ par $x_1$ et $dx$ par $\frac{dx_1}{s}$. En formant directement cette équation transformée, en partant de (16), on obtient par l'identification $\lambda_i$.

Si le coefficient $a_k^m$ et les coefficients précédents de $A_k$ avaient été égaux aux coefficients correspondants de $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ et différents des correspondants de $A_{k+1}, \ldots, A_n$, la même substitution dans (17) nous donnerait, en employant le procédé et les notations déjà employées,

$$\begin{aligned} b_k b_{k+1} \ldots b_n \left[ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \right] x^{k-1} dv \\ + x F(x, v)\, dv + \left[ vc + xG(x, v) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

d'où, en identifiant avec l'équation transformée obtenue en partant de (16), la détermination de la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$.

On peut montrer, à l'aide de ce que nous venons de dire sur la détermination des exposants $\lambda$, que les $\lambda$ relatifs aux diverses intégrales d'un même cycle sont égaux et que, par conséquent, on peut, dans (15) associer les facteurs de manière à n'avoir que le produit de facteurs holomorphes. Je ne donnerai pas cette démonstration qui n'offre qu'une complication de notation. Le fait signalé ne nous sera pas utile dans la suite. Dans le cas où la forme d'intégrale (15) sera valable, l'égalité des $\lambda$ relatifs aux intégrales d'un même cycle résultera *a posteriori* du rapprochement des deux faits : 1° le premier membre de (15) est convergent pour $x$ et $|y|$ suffisamment petit, quel que soit l'argument de $x$; 2° le système des exposants $\lambda$ est déterminé d'une façon unique, abstraction faite d'un facteur $k$ dont nous avons parlé.

Le calcul que nous avons indiqué s'applique sans difficulté à la détermination de l'exposant de l'intégrale $y = 0$, si elle existe. En permutant le rôle de $x$ et de $y$, il s'applique au calcul de l'exposant de l'intégrale $x = 0$, si elle existe.

Nous avons les conclusions suivantes : 1° *la forme indiquée pour l'intégrale générale ne peut être valable que si l'équation admet $n - 1$ intégrales normales ; 2° à un facteur commun près les $n + 1$ exposants $\lambda$ sont déterminés d'une façon unique.*

**30.** Il nous reste à examiner si les différents termes de $h(x, y)$ peuvent être déterminés et si le développement obtenu est convergent. Examinons d'abord si $h(x, y)$ existe formellement. Pour éviter des considérations inutiles pour la suite des idées, je ne supposerai pas, au moins tout d'abord, que les $\lambda$ aient été déterminés au préalable par la méthode qui vient d'être indiquée. Je vais montrer qu'on peut déterminer les $\lambda$ en même temps que les coefficients de $h(x, y)$ lorsque cette détermination est possible.

L'équation différentielle ayant une intégrale générale de la forme (15)

peut s'écrire

$$\left(A_0 A_1 \ldots A_n \frac{\partial h}{\partial y} + \Sigma \lambda_i A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n\right) dy$$
$$+ \left[A_0 A_1 \ldots A_n \frac{\partial h}{\partial x} + \Sigma \lambda_i \varphi_i(x) A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n\right] dx = 0,$$

en identifiant cette équation avec l'équation donnée, on obtient

$$\Sigma \lambda_i A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n \left[X - Y \varphi_i(x)\right] = \left(Y \frac{\partial h}{\partial x} - X \frac{\partial h}{\partial y}\right) A_0 A_1 \ldots A_n$$
$$i = 0, 1, \ldots, n.$$

Le facteur $X - Y\varphi_i(x)$ qui devient identiquement nul, lorsque dans $X$ et $Y$ on remplace $y$ par $-\varphi_i(x)$, est divisible par $y + \varphi_i(x) = A_i$; le quotient sera une fonction holomorphe d'ordre $n-1$. En divisant les deux membres par le produit $A_0 A_i \ldots A_n$, on obtient

$$(21) \qquad Y(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} - X(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = C(x, y).$$

C est d'ordre $n-1$ et linéaire et homogène par rapport aux $\lambda$. Nous prendrons

$$(22) \qquad h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y) + \ldots + h_n(x, y) + \ldots$$

les $h_n$ étant des polynomes de degré à l'égal de l'indice.

Pour que l'égalité (21) soit possible, il faut que les termes de degré $n-1$ de $C(x, y)$ soient identiquement nuls. En écrivant qu'il en est ainsi, nous obtenons $n$ relations linéaires et homogènes en $\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n$. Ces relations, si elles sont distinctes, nous déterminent les $\lambda$ à un facteur près, que nous choisirons arbitrairement. Si elles ne sont pas distinctes, elles nous permettront d'exprimer certains des $\lambda$ en fonction des autres qui resteront arbitraires pour le moment.

Cherchons à déterminer les deux coefficients de $h_1$. En identifiant les termes de degré $n$ des deux membres de (21), on obtient $n+1$ relations

où les seules quantités encore indéterminées sont les deux coefficients de $h_1$ et les $\lambda$ qui seraient restés encore arbitraires. En se servant de deux relations pour déterminer les deux coefficients, il restera $n-1$ relations entre les $\lambda$ et les coefficients.

D'une façon générale, pour déterminer les coefficients de $h_m$, on identifiera les termes de degré $m+n-1$ des deux membres; $m+1$ des relations obtenues détermineront les coefficients de $h_m$; il restera $n-1$ relations entre les coefficients de X et de Y et les $\lambda$ restés arbitraires.

Nous voyons qu'il y a une accumulation de conditions portant sur les coefficients et sur les $\lambda$ arbitraires. Ces conditions seront distinctes, s'il n'y a pas de relations entre les coefficients de Y et de X; en effet, on voit que chacun de ces groupes de conditions contient des coefficients de Y et de X qui n'entrent pas dans les groupes précédents. Dans les conditions trouvées pour la détermination de $h_m(x, y)$ entrent linéairement les coefficients des termes de degré $m$ de X et de Y, tandis que dans les conditions précédemment trouvées entraient les coefficients de terme de degré au plus égal à $m-1$. Nous concluons, qu'en général, l'équation n'aura pas d'intégrale de la forme indiquée. En disant que $n-1$ conditions doivent être vérifiées pour que la détermination des coefficients de $h_m$ soit possible, je n'envisage que le cas général. Les $m+1$ équations que nous obtenons dans l'identification des termes de degré $m+n-1$ des deux membres sont linéaires par rapport aux $m+1$ coefficients inconnus. Il sera donc facile d'énoncer des cas où il faudra plus de $n-1$ conditions pour que ce système d'équations admette des solutions.

Ce que nous avons dit, pour montrer que les conditions que l'on rencontre en voulant déterminer les termes de $h$ et les $\lambda$ sont distinctes, suppose que X et Y sont des développements contenant un nombre indéfini de termes. Si X et Y étaient des polynomes, les conditions ne portant plus que sur un nombre limité de coefficients, rien ne prouve que les conditions successives que l'on rencontre soient distinctes. Il est évident que toutes ces conditions en nombre indéfini seront vérifiées dès qu'un certain nombre d'entre elles le seront. En effet, supposons, par exemple,

que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ soient des polynomes de troisième degré, les termes du degré minimum étant du second. Il est évident que, pour certaines formes de polynomes X et Y, l'équation admettra une intégrale générale de la forme

$$e^{\lambda(x, y)} A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} = \text{const.} \tag{23}$$

On peut prendre, par exemple, pour $h$, A, B, C, les premiers membres des équations de quatre droites passant par l'origine, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ restant arbitraires. On peut encore prendre $h(x, y) = 1$, $A = a(x - b)(y - c)$, $BC = P$, P étant un polynome du troisième degré dont les termes de degré minimum sont du second, X et Y dépendront, dans le premier cas, de sept arbitraires et de huit arbitraires dans le second cas. Si donc on prend des polynomes X et Y à coefficients indéterminés et qu'on écrive les conditions successives pour que l'équation admette une intégrale de la forme (23), ces conditions, en nombre indéfini, ne seront pas distinctes.

Nous pourrons conclure : *En général, il est impossible de déterminer le développement $h(x, y)$.*

**31.** Examinons maintenant le cas où toutes les conditions que l'on rencontre dans la détermination des $\lambda$ et des coefficients de $h$ sont satisfaites.

Je vais montrer d'abord que les rapports des exposants $\lambda$, qui seuls peuvent être déterminés, le seront lorsqu'on aura calculé un nombre limité de coefficients de $h$ et qu'ils coïncideront avec les rapports des exposants obtenus par la première méthode. Supposons que les termes de degré $p$ des développements $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... soient différents. Soit

$$k(x, y) = h_0(x, y) + h_1(x, y) + \ldots + h_p(x, y),$$

l'ensemble des termes de $h$ de degré inférieur à $p + 1$, termes que l'on suppose déterminés, les coefficients de $k$, ainsi que les $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_n$ pouvant *a priori* dépendre d'un certain nombre d'arbitraires.

Nous savons que dans la détermination des coefficients de $k$ n'inter-

viennent que les termes de X et de Y dont le degré est au plus égal à $n+p$. Ceci posé, considérons l'équation

$$(23') \qquad Y'(x,y)\,dy + X'(x,y)\,dx = 0$$

qui admet pour intégrale générale

$$(24) \qquad e^{k(x,y)} X'_0 Y'_1 \ldots A'_n = \text{const.}$$

D'après la façon dont ont été déterminés les coefficients de $k$, les termes de $Y'X - X'Y$, jusqu'au degré $2n+p$ inclusivement, seront identiquement nuls. Il en résulte immédiatement que l'on peut trouver un polynome $P(x,y)$, $[P(0,0) \neq 0]$, tel qu'en multipliant par P les deux membres de (23') on obtienne une équation

$$Y''(x,y)\,dy + X''(x,y)\,dx = 0,$$

où les termes de $Y''$ et $X''$ jusqu'au degré $n+p$ sont identiques à ceux de X et Y. Cette équation a son intégrale générale donnée par (24). Or, si l'on applique à cette équation la première méthode indiquée pour la détermination des $\lambda$, on obtient les mêmes valeurs qu'en appliquant cette méthode à l'équation donnée, car les termes de degré inférieur à $n+p$ interviennent seuls dans cette détermination. Il résulte de là que, lorsqu'on sera arrivé à la détermination des coefficients de $h_{p+1}$, les $\lambda$ ne dépendront d'aucune autre arbitraire que le facteur par lequel on peut toujours les multiplier.

Puisque les $\lambda$ déterminés par la première méthode coïncident avec les $\lambda$ obtenus en cherchant à satisfaire aux conditions rencontrées dans la détermination de $h(x,y)$, nous pourrons toujours les supposer déterminés d'abord par la première méthode.

Nous concluons que, quelle que soit celle des deux méthodes employées, *les $\lambda$ ne dépendent d'aucune autre arbitraire que le facteur constant par lequel on peut toujours les multiplier.*

*Nous verrons dans la suite qu'en général $h(x, y)$ ne dépend également d'aucune autre arbitraire que ce même facteur constant.*

**32.** Montrons que si le développement $h(x, y)$ existe, il est convergent en général. Si les diverses intégrales normales $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, ... admettaient toutes à l'origine des tangentes distinctes, ainsi que cela a lieu, en général, nous pourrions aborder immédiatement la démonstration. Afin de pouvoir considérer tous les cas qui peuvent se présenter, faisons les changements de variables suivants :

Je commence par remplacer, s'il y a lieu, $x$ par $t^m$, de manière à rendre holomorphes toutes les intégrales algébroïdes. Je considère ensuite une de ces intégrales, l'intégrale $A_0 = 0$, par exemple, et je fais un changement de variable tel que cette intégrale devienne $y = 0$. Je puis, enfin, faire en sorte, en remplaçant $y$ par $z^p$, que pour les diverses intégrales algébroïdes $z(t)$, $\frac{z}{t}$ ne tende pas zéro, exception faite pour l'intégrale $z = 0$.

Considérons, en effet, les termes de degré minimum en $t$ de $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., soit $p_1$, $p_2$, $p_n$ ces degrés, et $p$ le plus grand de ces nombres ; en posant $y = z^p$, nous aurons obtenu le résultat énoncé.

Nous aurons donc une expression

$$e^{b_1 t^{q_1}} (z + z^2 + b_1 t^{q_2} + \ldots) \ldots z^n + b_n t^{q_n} \ldots \quad .$$

où $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ sont au plus égaux à $p$. Cette expression égalée à une constante nous donnera, au moins formellement, l'intégrale générale de l'équation obtenue en faisant les changements de variables indiqués dans l'équation (16). $k(t, z)$ existera formellement et satisfera à une équation analogue à (21). Nous allons voir que le développement $k(t, z)$ satisfaisant à cette équation est unique ; par conséquent, en cherchant $k(t, z)$ satisfaisant à cette équation et, faisant les changements de variables inverses des changements de variables employés, nous trouverons $h(x, y)$. Si $k(z, t)$ est convergent, il en est de même de $h(x, y)$.

Nous sommes donc ramenés à faire la démonstration de la convergence pour une équation dont l'intégrale générale peut, au moins formellement, se mettre sous la forme

$$e^{h(x,y)}(y^p + \ldots + b_1 x^{q_1} + \ldots + y^p + b_n x^{q_n} + \ldots)^{\alpha} = \text{const.}$$

où l'on a $b_1 b_2 \ldots b_n \neq 0$, et $p$ au moins égal à $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

On en conclut que l'on peut écrire

$$Y = b_1 b_2 \ldots b_n \lambda_0 x^{q_1+q_2+\ldots+q_n} + \ldots,$$
$$X = b_1 b_2 \ldots b_n \Sigma \lambda_1 q_1 x^{q_1+q_2+\ldots+q_n-1} y + \ldots.$$

Si l'on désigne par $\alpha$ le produit $b_1 b_2 \ldots b_n$, et par $A(x, y)$, $B(x, y)$ des développements en $x$ et $y$ dont les termes de degré minimum sont de degré supérieur à $q$, on peut écrire encore

$$(25) \quad \begin{cases} Y = \alpha \lambda_0 x^q - \alpha_1 x^{q-1} y + \ldots\ldots\ldots + \alpha_q y^q - A(x, y) = Y_q - A(x, y), \\ X = \alpha \Sigma \lambda_1 q_1 x^{q-1} y + \beta_2 x^{q-2} y^2 + \ldots + \beta_q y^q + B(x, y) = X_q + B(x, y). \end{cases}$$

On lèverait tous les doutes que peut susciter, dans la démonstration précédente, l'emploi de $k(t, z)$ dont la convergence n'est pas démontrée, en raisonnant comme aux Paragraphes **11** et **31**, et employant une équation différentielle auxiliaire ayant en commun, avec l'équation donnée, les termes de degré inférieur à $n + p$ dans X et Y. C'est là un mode de raisonnement auquel nous ferons plusieurs fois appel sans le développer.

L'équation donnant $h(x, y)$ pourra s'écrire

$$Y_q \frac{\partial h}{\partial x} - X_q \frac{\partial h}{\partial y} = A(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} + C(x, y).$$

A et B sont d'ordre supérieur à $q$ et C d'ordre supérieur ou égal à $q$.

Nous avons à déterminer

$$h_m(x, y) = \Sigma h_{s,r} x^s y^r; \qquad s + r = m; \qquad r = 1, 2, \ldots, m,$$

en faisant successivement $m = 1, \ldots, 2, \ldots$.

Dans chacune de ces déterminations nous commencerons par déterminer le coefficient $l_0$ du terme en $x$, ensuite le coefficient $l_1$, ainsi de suite. Cet ordre intervient dans la démonstration qui suit. Nous obtenons $l_r$ en identifiant les termes en $x^{s+q-1}y^r$ des deux membres. On a ainsi

$$(26)\qquad \alpha_s \lambda_0 - r\sum \lambda_i q_i \, l_r - \sum \left[ (r-i)\alpha_{s-i} - (s-i)\beta_i \right] l_r = B_r,$$
$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

$B_r$ est une fonction des coefficients de A, B, C et des coefficients déjà déterminés de $h$. Considérons les quotients des coefficients du second membre par $s-r$

$$\frac{\lambda_0 - r\sum \lambda_i q_i}{s-r} \quad \text{et} \quad \frac{(r-i)\alpha_{s-i} - (s-i)\beta_i}{s-r}.$$

La première quantité désigne l'affixe du centre de gravité des masses $s$ et $r$, placées aux deux points $\lambda_0$ et $-\sum \lambda_i q_i$ : il en résulte que si $\lambda_0$ et $\sum \lambda_i q_i$ n'ont pas leur rapport positif, cette quantité restera, quels que soient $r$ et $s$, supérieure en module à un nombre $\varepsilon$. Le module de la deuxième expression restera toujours inférieur à $\eta$ : $\eta$ étant le plus grand des modules des quantités $\alpha_i$, $\beta_i$.

Désignons par $D(x, y)$ une fonction majorante commune à $A(x, y)$ et à $B(x, y)$. Si nous remarquons maintenant que les seuls termes de $C(x, y)$ qui interviennent dans la détermination des termes de $h$ sont ceux qui contiennent en facteur $x^{q-1}$, nous pouvons considérer à part ces termes et désigner par $x^{q-1}E(x, y)$ une fonction majorante de l'ensemble de ces termes. On voit alors, sans difficulté, qu'on obtient une fonction $k(x, y)$ qui a tous ses termes supérieurs en module aux termes correspondants de $h(x, y)$, en considérant la fonction déterminée par l'équation

$$(27)\qquad \begin{cases} \left[\varepsilon x^{q-1} - \eta_1 x^{q-1}y - \eta_2 x^{q-2}y^2 - \ldots - \eta_{q-1} - D(x, y)\right] \\ \quad \times \left[x\dfrac{\partial k}{\partial x} + y\dfrac{\partial k}{\partial y}\right] = x^{q-1}E(x, y) - f(x, y). \end{cases}$$

où $\chi(x, y)$ est une fonction ne contenant pas $x$ à une puissance supérieure à $q-2$ et que nous déterminerons terme à terme par la condition que l'on puisse déterminer les termes de $k(x, y)$. A cet effet, nous déterminerons les termes de $k(x, y)$ dans le même ordre que les termes de $h(x, y)$. Pour obtenir les termes de degré $r+s$ de $k(x, y)$, nous identifions les termes de degré $q+r+s-1$ des deux membres. Les $r+s+1$ équations obtenues par l'identification des termes où $x$ entre à une puissance supérieure à $q-2$, nous déterminent les $r+s+1$ coefficients cherchés de $k(x, y)$, il nous reste ensuite $q-1$ relations obtenues par l'identification des termes $x^{q-2}, x^{q-3}, \ldots, x$ et enfin des termes indépendants de $x$. Ces relations ne pourraient être satisfaites si nous ne disposions pas de $\chi(x, y)$; elles nous permettent de déterminer la fonction $\chi(x, y)$; cela revient à exprimer que le second membre de (27) peut être divisé par le premier facteur du premier membre de cette équation. Si nous montrons que le développement $\chi$ ainsi déterminé est convergent, nous aurons

$$x\frac{\partial k}{\partial x} + y\frac{\partial k}{\partial y} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant un développement convergent dont les termes du degré minimum sont du premier degré. Si l'on désigne par $F(x, y)$ une fonction majorante de $f(x, y)$, on voit que les termes de $k$ sont inférieurs aux termes correspondants de $F$; $k(x, y)$ est donc convergent pour $x$ et $y$ voisins de zéro.

Démontrons l'existence de la fonction $\chi(x, y)$. Écrivons

$$\chi(x, y) = x^{q-2}y^2\chi_2(y) + x^{q-3}y^3\chi_3(y) + \ldots + xy^{q-1}\chi_{q-1}(y) + y^q\chi_q(y).$$

Soient, d'autre part,

$$x - y\gamma_1(y), \quad x - y\gamma_2(y), \quad x - y\gamma_{q-1}(y),$$

les $q-1$ facteurs primaires du premier facteur du premier membre de (27). Pour que le second membre soit divisible par ce facteur, il faut

et il suffit que le second membre devienne identiquement nul lorsqu'on remplace $x$ par $y\chi_1(y)$. En divisant par $y^{\lambda}$, qui se trouve en facteur dans le résultat, on obtient les équations

$$\chi_1^{q_1}(y)\chi_2(y) + \chi_1(y)\chi_2(y) + \ldots + \chi_1(y)\chi_{n-1}(y) + \chi_n(y) + E_1(y) = 0,$$
$$\chi_1^{q_2}(y)\chi_2(y) + \chi_1(y)\chi_2(y) + \ldots + \chi_1(y)\chi_{n-1}(y) + \chi_n(y) + E_2(y) = 0.$$

On a ainsi $q - 1$ équations, où les $q - 1$ inconnues sont $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_q$; le déterminant de ces inconnues n'est pas nul; on peut donc déterminer $\chi$ de manière à satisfaire aux conditions indiquées.

Il est bon de nous rendre compte de la signification des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ que nous avons trouvés comme exposants de $x$ après une suite de changements de variables. En se reportant au n° **49**, on voit que, toutes les intégrales étant rendues holomorphes, $q_j$ désigne l'exposant de $x$ dans le premier des termes de $A_j$ qui diffère du terme correspondant de $A_0$. Si nous faisons jouer à une intégrale $A_i = 0$ le rôle joué par $A_0 = 0$, nous aurons un autre système de nombres $q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}, \ldots, q_{i+1}, \ldots, q_n$, que nous pourrons affecter de l'indice $i$, s'il y a quelque ambiguïté. Si le rapport des deux nombres $\lambda_0$ et $\Sigma\lambda_i q_i$ est positif, nous ne pourrons démontrer la convergence du développement $h(x, y)$ par le raisonnement précédent; mais si l'on peut trouver $\lambda_i$ tel que

$$\lambda_0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_{i-1} q_{i-1} + \lambda_{i+1} q_{i+1} + \ldots + \lambda_n q_n$$

n'aient pas leur rapport positif, on fera la démonstration de la convergence en faisant jouer à $A_i = 0$ le rôle joué par $A_0 = 0$. On montrerait, du reste, par un raisonnement déjà employé, que, si l'on peut déterminer les termes de $h(x, y)$ en opérant d'une façon, on pourra déterminer $h(x, y)$ en opérant de toute autre façon. La démonstration de la convergence ne sera donc en défaut que si, quel que soit $i$, le rapport de $\lambda_0$ et de $\Sigma\lambda_j q_j$ est positif ($j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$).

J'admettrai que *ce rapport ne peut être positif, quel que soit i, que si les rapports de tous les λ sont positifs*. Je démontre, sans peine, géométriquement, cette dernière proposition dans le cas, qui est le plus général,

où tous les $q$ sont égaux et aussi, quels que soient les $q$, dans le cas où $n$ est inférieur à cinq. Dans les autres cas, je n'ai pas de démonstration rigoureuse. Cela étant admis, je dirai :

*Si les rapports des exposants $\lambda$ ne sont pas tous positifs et si le développement $h(x, y)$ peut être déterminé formellement, ce développement est convergent.*

Remarquons que la démonstration s'applique à un point singulier du premier ordre, c'est-à-dire à l'équation que nous avons considérée dans la première partie et dans le cas où le rapport $\lambda$ des deux racines de l'équation adjointe n'est pas négatif, aucune de ces racines n'étant nulle.

Il résulte encore du mode de détermination des coefficients de $h(x, y)$ employé que, sauf dans le cas où, pour certaines valeurs de $s$ et de $r$, le coefficient de l'inconnue $l_r$ dans (26) est nul, il ne peut y avoir qu'un système de coefficients pour $h(x, y)$. *Le développement $h(x, y)$, s'il existe, est, en général, unique.*

**33.** Les conclusions à tirer de l'existence d'une intégrale générale de la forme indiquée ne me paraissent pas bien nettes, même si tous les exposants $\lambda$ sont réels. Nous allons montrer directement, en nous servant de l'équation (16), que, *si les $\lambda$ ne sont pas positifs, il y a une infinité de caractéristiques passant par l'origine.* En effet, en nous reportant aux expressions (25) de X et Y, nous voyons qu'il existe un exposant, nous supposerons que ce soit $\lambda_0$, tel que l'équation puisse, ainsi que nous l'avons fait, être mise sous la forme

$$(cx^q + c_1 x^{q-1} y + \ldots) dy + y(c' x^{q-1} + c'_1 x^{q-2} y + \ldots) dx = 0,$$

$c$ et $c'$ n'ayant pas leur rapport positif. Si nous posons $y = z^r$ et $x = uz$, l'équation devient

$$[(cr + c')u + \ldots] dz + z(c' + \ldots) du = 0.$$

En prenant $r$ égal à *un* si le rapport $\frac{c}{c'}$ n'est pas réel et en prenant $r$ assez

grand si $\frac{c}{c'}$ est négatif, le rapport des coefficients $cx + c'$ et $c'$ ne sera pas positif, il y aura une infinité de caractéristiques passant par l'origine. La démonstration est valable que le développement $h(x, y)$ existe ou non.

**34.** Considérons maintenant le cas où tous les $\lambda$ sont positifs. Les circonstances qui se présentent, lorsqu'on cherche à déterminer les termes de $h(x, y)$, nous permettent de distinguer trois cas différents :

1° *$h(x, y)$ n'existe pas.* On est arrêté par une impossibilité dans la détermination de ses termes. Cette circonstance peut se présenter, comme cela se produit dans le cas général, parce que l'on obtient, pour déterminer un groupe de coefficients de $h$, plus d'équations qu'il n'y a d'inconnues. Elle peut encore se présenter, lorsque, les nombres $\lambda$ vérifiant des relations linéaires à coefficients entiers, on obtient dans (26) pour coefficient de l'inconnue à déterminer un nombre nul. Les deux cas ne sont pas distincts au fond et l'on peut admettre que, si l'on déterminait les coefficients dans un autre ordre, la seconde circonstance ne se présenterait pas. Nous montrerons que, dans le cas qui nous occupe, il y a toujours une infinité de caractéristiques passant par l'origine. Ce cas est tout à fait analogue au cas examiné sous le nom de *foyer* dans la première Partie.

2° *On peut déterminer les termes de $h(x, y)$*, mais les rapports des nombres $\lambda$ ne sont pas tous rationnels. Nous ne pouvons affirmer, en général, la convergence de $h(x, y)$. C'est un cas tout à fait analogue à celui qui se présente pour un col.

De ce que nous avons dit, à propos d'un col, il résulte que le développement $g$ est divergent dans certains cas. D'autre part, il serait facile d'indiquer des classes d'équations analogues à celles citées à propos d'un col et pour lesquelles $h$ serait convergent. Il est évident que pour ces équations les seules caractéristiques passant par l'origine sont celles qui sont fournies par les intégrales algébroïdes. Il paraît probable qu'il en est toujours ainsi. Nous n'examinerons plus dans ce qui suit ce cas 2°.

3° *On peut déterminer les termes de $h(x, y)$* et les rapports des

nombres $\lambda$ sont tous rationnels. On peut supposer ces différents nombres entiers. Nous verrons que ce cas est tout à fait l'analogue du cas d'un centre.

Nous devons remarquer que le développement $h(x, y)$ ne saurait être déterminé d'une façon unique. En effet, si l'on désigne par $v$ le produit $A_0^{\lambda_0}$, $A_1^{\lambda_1}, \ldots, A_n^{\lambda_n}$, l'intégrale générale pouvant se mettre, au moins formellement, sous la forme $e^{h(x,y)}v = \text{const.}$ pourra également se mettre sous la forme

$$ve^{h(x,y)}(1 + c_1 v^{\lambda_1} + c_2 v^{2\lambda_1} + \ldots) = \text{const.},$$

les constantes $c_1, c_2, \ldots,$ étant arbitraires. Nous montrerons que ces constantes arbitraires qui entrent dans le développement $h$ peuvent être déterminées de telle sorte que le développement soit convergent. Il en résultera évidemment qu'il n'y a pas d'autres intégrales passant par l'origine que les intégrales algébroïdes.

**35.** Pour établir les résultats qui viennent d'être indiqués dont la démonstration n'est pas immédiate, j'établirai d'abord une forme sous laquelle peut être mise l'intégrale générale de l'équation. Nous supposerons effectués des changements de variables tels que les intégrales algébroïdes de $y(x)$ deviennent holomorphes. Pour aucune d'elles par conséquent le rapport $\frac{y}{x}$ ne croîtra indéfiniment, lorsque $x$ tend vers zéro. Ces changements de variables pourront toujours s'effectuer, ils seront du genre de ceux que nous avons employés, paragraphe **32**, ils peuvent augmenter l'ordre du point singulier et le nombre des intégrales algébroïdes, mais ils ne changeront pas la nature des exposants $\lambda$ qui seront toujours tous positifs dans le cas actuel.

Soit, en désignant par $X_n$ et $Y_n$ les parties de degré minimum de X et Y,

$$[Y_n(x, y) + B(x, y)]dy + [X_n(x, y) + A(x, y)]dx = 0 \tag{28}$$

l'équation différentielle. Nous pouvons toujours supposer, d'après ce qui vient d'être dit, que l'intégrale générale de

$$Y_n(x, y)dy + X_n(x, y)dx = 0$$

est

$$(29)\qquad (y - a_0 x)(y - a_1 x)\dots(y - a_n x) = \text{const.}$$

La constante $a_0$ sera supposée nulle : toutes les autres constantes seront supposées différentes de zéro : plusieurs d'entre elles pourront être égales. Il en résulte qu'en prenant la différentielle totale de (29), on obtiendra, à un facteur près, $Y_n dy + X_n dx$.

Posons

$$(30)\qquad \begin{cases} y = tx, \qquad y' = (y - a_1 x)(y - a_2 x)\dots(y - a_n x) = \rho, \\ t = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad u = (1 - a_1 t)(1 - a_2 t)\dots(1 - a_n t). \end{cases}$$

Nous aurons

$$(31)\qquad x = \frac{\rho}{u}, \qquad y = \frac{\rho t}{u}.$$

En prenant pour nouvelles variables $t$ et $\rho$, l'équation (28) devient

$$(32)\qquad [(1 - a_1 t)(1 - a_2 t)\dots(1 - a_n t) + \rho A_1(\rho, t)]\,d\rho + \rho^2 B_1(\rho, t)\,dt = 0.$$

$A_1$ et $B_1$ pourront être développés suivant les puissances de $\rho$, les coefficients étant des fonctions de $t$.

Précisons le champ dans lequel nous étudierons la nouvelle équation (32).

L'équation (28), d'où nous sommes partis, n'est valable, en général, que pour $x$ et $y$ inférieurs à une certaine limite $\varepsilon'$. Pour définir le domaine dans lequel $t$ variera, marquons dans le plan des $t$ les points $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_n}$, décrivons autour de ces points de petits cercles et, de l'origine comme centre, décrivons un grand cercle comprenant les premiers à son intérieur : nous ferons varier $t$ dans le domaine D compris entre le grand cercle et les petits cercles. Si $t$ varie dans D, $u$ restera supérieur à une limite qu'on peut déterminer. On pourra donc trouver $\varepsilon$ tel que pour

$|\rho| < \varepsilon$, on ait $|x| < \varepsilon'$, $|y| < \varepsilon'$ et que, par conséquent, nous ayons le droit de faire le changement de variables et d'employer l'équation (32). En prenant $t$ dans le domaine D et $\varepsilon$ suffisamment petit, on peut pour $\rho < \varepsilon$ mettre l'équation sous la forme

$$d\rho + \rho^2 \psi(\rho, t)\, dt = 0,$$

avec

$$\psi(\rho, t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\rho + \psi_3(t)\rho^2 + \ldots,$$

et il existera une fonction majorante de $\psi(\rho, t)$ que nous pourrons toujours désigner par $\frac{M}{\varepsilon - \rho}$, M étant une constante. Si l'on considère l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \psi(\rho, t),$$

cette équation admet une intégrale que l'on peut mettre sous la forme

$$f(\rho, t) = \rho f_0(t) + \rho^2 f_1(t) + \rho^3 f_2(t) + \ldots.$$

On aura

$$f_0(t) = 0,$$

$$f_i(t) = \sum f_{j+1}(t) \psi_{i-j}(t) \qquad [j = 1, 2, \ldots, i-1].$$

Nous prendrons les $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tels que, pour $t = 0$, $f(\rho, t)$ se réduise à $\rho$; nous aurons donc

$$f_i(t) = \int_0^t \sum f_{j+1}(z) \psi_{i-j}(z)\, dz.$$

Nous obtiendrons une limite supérieure de ce terme en remplaçant $f_j$ et $\psi_{i-j}$ par des quantités supérieures en module et en remplaçant $dt$ par $d\sigma$ différentielle de l'arc de courbe décrit par le point variable $z$ allant de zéro à $t$. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{M}{\varepsilon - \rho}$$

nous fournira donc une fonction majorante de $f$, F étant déterminé par les mêmes conditions initiales. Nous avons vu au paragraphe **14** que F, et

par suite $f_i$ est convergent si l'on a $\rho < \eta$ et $\sigma\rho < \eta_i$. On pourra donc prendre $\sigma$ aussi grand que l'on veut, pourvu que l'on prenne $\rho$ suffisamment petit. Nous pouvons, bien entendu, déformer l'arc de courbe décrit par $t$ et suivant lequel nous intégrons, de manière à lui donner la longueur minimum, sans le faire sortir du domaine D.

*Nous avons une intégrale générale de l'équation différentielle de la forme*

$$\rho = \rho^{\alpha} f_1(t) + \rho^{\alpha_1} f_2(t) + \ldots + \text{cont.},$$

*les coefficients $f$ de ce développement étant des fonctions de $t$ définies pour $t$ variant dans un certain domaine* D *ne contenant aucun des points critiques de la fonction définie par*

$$u = (1 - a_1 t)^{\alpha} (1 - a_2 t)^{\alpha_1} \ldots (1 - a_n t)^{\alpha_n}.$$

*Ce développement est convergent par*

$$\rho < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sigma < l,$$

*$l$ étant arbitraire, $\varepsilon$ suffisamment petit et $\sigma$ étant la longueur minimum qu'on peut donner à un arc de courbe décrit par $t$ en allant d'une valeur initiale* o *à une valeur $t$. Cet arc de courbe peut être astreint à tourner plusieurs fois autour des points critiques de $u$.*

**36.** Indiquons une forme de l'intégrale générale particulière au cas où $h(x, y)$ existe formellement. Je pose

$$(33) \qquad v = (y - \varphi_0(x))(y - \varphi_1(x)) \ldots (y - \varphi_n(x)) = A_0 A_1 \ldots A_n,$$

en désignant, comme précédemment, par $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les divers facteurs qui, égalés à zéro, fournissent les intégrales holomorphes. Je vais montrer que, si l'on peut déterminer les divers termes du développement $h(x, y)$, il existe un développement $K(v, x, y)$ suivant les puissances de $v$, dont les coefficients sont des séries dont les termes sont des polynomes homogènes en $x$ et en $y$ et qui, égalé à une constante, fournit l'intégrale

générale de l'équation différentielle. $K(v, x, y)$ est convergent pour $v, x, y$ suffisamment petits, et pour $t = \frac{x}{y}$ restant compris dans le domaine D et décrivant dans ce domaine un arc de longueur finie à partir de $t = 0$.

Nous avons

$$dv = \frac{v[\alpha(x, y)\,dx - \beta(x, y)\,dy]}{\lambda_0 A_0 A_1 \ldots A_n},$$

en posant

$$\alpha = \Sigma \lambda_i A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n \varphi_i(x), \qquad \beta = \Sigma \lambda_i A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n.$$

Pour que $K(v, x, y)$ nous fournisse l'intégrale générale de l'équation (28) il faut et il suffit que l'on ait

$$Y(x, y)\frac{\partial K}{\partial x} - X(x, y)\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{v[\Sigma \lambda_i A_0 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n \varphi_i(x) - X]}{\lambda_0 A_0 \ldots A_n}\frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

En comparant avec le calcul du Paragraphe 30 on voit que cette équation peut s'écrire

$$(34) \qquad Y(x, y)\frac{\partial K}{\partial x} - X(x, y)\frac{\partial K}{\partial y} + vZ(x, y)\frac{\partial K}{\partial v} = 0,$$

les termes du degré minimum de X, Y, Z étant de degré $n$.

Si les coefficients de X et Y sont quelconques, on sera arrêté par des impossibilités dans la détermination des termes de K. Je vais montrer que si le développement $h(x, y)$ existe, au moins formellement, $K(v, x, y)$ existe. La démonstration est immédiate, si $h(x, y)$ est convergent. Nous avons en effet l'intégrale

$$v^c e^{h(x, y)} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad V = \text{const.}, \qquad V = ve^{\frac{h(x, y)}{c}}.$$

Le développement

$$K(v, x, y) = V + c_1 V^2 + c_2 V^3 + \ldots + c_n V^n + \ldots$$

où les $c$ sont des constantes arbitraires, nous fournit une fonction K. Pour étendre la démonstration au cas où nous ne savons rien sur la convergence de $h(x, y)$ il n'y a qu'à raisonner comme au paragraphe 11. On remarque que, si l'on suppose $X, Y, h, K$ ordonnés en série de polynomes homogènes, les coefficients des termes de $h$ et de K de degré inférieur à $m$ ne dépendent que des coefficients des termes de degré inférieur à $m$ de X et Y. Pour rendre ce fait plus évident, on peut considérer les divers coefficients de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, comme un système de coefficients donnés *a priori*, de manière à ne pas avoir à tenir compte de ce que ces coefficients et, par leur intermédiaire, les coefficients de $h$ et de K, dépendent des coefficients de X et de Y. Cela étant, si l'on désigne par $l(x, y)$ l'ensemble des termes de $h(x, y)$ jusqu'au degré $m$, et si l'on considère l'équation

$$Y_1(x, y)\,dy = X_1(x, y)\,dx,$$

ayant pour intégrale générale

$$v\,e^{l(x,y)} = \text{const.}, \tag{35}$$

on peut toujours supposer en divisant, si cela est nécessaire, par un facteur les deux membres de l'équation, que les termes de degré inférieur à $m+n$ de $X_1$ et $Y_1$ sont identiques aux termes correspondants de X et de Y. Donc les termes que l'on déterminera pour la fonction $L(v, x, y)$ satisfaisant à

$$Y_1(x, y)\frac{\partial L}{\partial x} - X_1(x, y)\frac{\partial L}{\partial y} + vZ_1(x, y)\frac{\partial L}{\partial v} = 0 \tag{36}$$

seront identiques aux termes que l'on pourra déterminer pour K satisfaisant à l'équation (34). On voit que K dépendra d'un nombre infini de constantes arbitraires. Je vais montrer qu'on peut déterminer ces constantes de manière à obtenir un développement convergent.

Employons le changement de variables (30), K devient une fonction $K_1(v, \xi, t)$ que, pour fixer les idées, nous supposerons ordonnée en

série de polynomes homogènes en $v$ et en $\rho$, les coefficients étant des fonctions de $t$. En répétant les calculs du Paragraphe précédent on voit que $K_1$ satisfait à l'équation

$$(37) \qquad \frac{\partial K_1}{\partial t} = \varphi_1(\rho, t)\frac{\partial K_1}{\partial \rho} + v\varphi_2(\rho, t)\frac{\partial K_1}{\partial v}.$$

Cette équation admet une intégrale qui, pour $t = 0$, se réduit à une fonction arbitraire de $v$ et de $\rho$. Nous considérons l'intégrale qui, pour $t = 0$, se réduit à $v$. On trouve des conditions de convergence de $K_1$ analogues à celles trouvées dans le Paragraphe précédent; $K_1$ est convergent pour $|v| < \varepsilon$, $|\rho| < \varepsilon$ et $\rho\sigma < \eta$.

Je vais montrer que, si dans $K_1(v, \rho, t)$ on remplace $\rho$ et $t$ en fonction de $x$ et $y$, on obtient un développement $K(v, x, y)$ suivant les puissances de $v, x, y$. Faisons d'abord la démonstration en supposant $h(x, y)$ convergent.

L'équation (34) a visiblement pour intégrales particulières, d'après la façon dont on l'a formée, les fonctions

$$ve^{\frac{h(x,y)}{\gamma}} \quad \text{et} \quad v - (A_0'^n A_1'^{n_1} \ldots A_n'^{n_n})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Nous avons désigné la première quantité par V, posons

$$(A_0'^n A_1'^{n_1} \ldots A_n'^{n_n})^{\frac{1}{\gamma}} = r(x, y), \qquad R = v - r.$$

Nous désignerons par $V_1$, $R_1$, $r_1$ ce que deviennent ces diverses quantités, lorsque $x$ et $y$ sont remplacées en fonction de $\rho$ et de $t$. L'intégrale générale de (34) sera une fonction arbitraire de V et de R. L'intégrale générale de (37) sera donc une fonction arbitraire de $V_1$ et de $R_1$. En particulier l'intégrale se réduisant, pour $t = 0$, à $v$ sera de la forme

$$f(V_1, R_1).$$

Sous cette forme, on voit que, si l'on remplace $\rho$ et $t$ en fonction de $x$

et de $y$, on a un développement ne contenant que des puissances de $v$, $x$, $y$. Comme, pour obtenir cette forme, nous sommes obligés de rapprocher dans $V_1$ et $R_1$ les termes qui contiennent $\rho$ à la même puissance, termes dont chaque groupe nous fournit un polynome homogène en $x$ et en $y$, nous aurons bien $k(v, x, y)$ se présentant sous la forme indiquée.

Cette conclusion, valable dans le cas où l'on sait que le développement $h(x, y)$ est convergent, s'étend par le mode de raisonnement déjà employé au cas où l'on ne sait rien sur la convergence.

Nous aurons donc l'énoncé suivant :

*Dans le cas où $h(x, y)$ existe formellement et où les rapports de tous les $\lambda$ sont positifs, il existe une intégrale générale de la forme*

$$k(v, x, y) = \text{const.},$$

*en posant*

$$v = A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu.$$

*$k$ est une fonction nulle pour $v = 0$ et qu'on peut développer suivant les puissances de $v$, les coefficients étant des fonctions de $x$ et de $y$ qui sont des séries dont les termes sont des polynomes homogènes en $x$ et en $y$.*

*Je ne puis affirmer que $k$ converge pour $x$, $y$ et $v$ suffisamment petits. D'après la démonstration, il faut que $t = \frac{x}{y}$ reste compris dans le domaine* D *et décrive dans ce domaine un arc de longueur finie à partir de $t = 0$.*

**57.** Nous allons montrer à l'aide de ce résultat que, dans le cas où les rapports de tous les exposants $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ sont rationnels et positifs, il existe un développement suivant les puissances de $x$ et de $y$ qui, égalé à une constante, donne l'intégrale générale de l'équation différentielle.

$v$ désigne une quelconque des $\nu$ quantités satisfaisant à la relation (33). Donc, en désignant par $v$ une de ces quantités et par $\omega$ une racine primitive de $z^\nu - 1 = 0$, en remplaçant $v$ par $\omega v$, $\omega^2 v$, ..., $\omega^{\nu-1} v$ et faisant la somme des diverses expressions obtenues, on aura une intégrale de

l'équation (34). Considérons dans cette somme les termes provenant du terme $\varphi^p k_p(x, y)$ de $k(\varphi, x, y)$, $k_p(x, y)$ désignant le coefficient de $\varphi^p$ dans $k$, la somme considérée sera

$$\varphi^p k_p(x, y)\left[1 + \omega^p + \omega^{2p} + \ldots + \omega^{(\nu-1)p}\right];$$

la parenthèse étant égale à $\frac{\omega^{p\nu}-1}{\omega^p-1}$ sera nulle si $p$ n'est pas un multiple de $\nu$ et égale à $\nu$ si $p$ est un multiple de $\nu$. La somme considérée sera donc une intégrale de la forme $L(\varphi^\nu, x, y)$.

En remplaçant $\varphi^\nu$ par son expression en $x$ et $y$, on aura une intégrale $H(x, y) = \text{const.}$ $H(x, y)$, que nous pouvons mettre sous la forme d'une série dont les termes sont des polynomes homogènes en $x$ et $y$, est une fonction holomorphe pour $x = y = 0$.

On rendra la démonstration de ce dernier point tout à fait rigoureuse en employant le théorème suivant :

*Si l'on a une série $\sum \varphi_n(x, y)$, dont les termes sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, si les termes de cette série restent finis pour $x$ et $y$ prenant toutes les valeurs réelles inférieures en module à $\varepsilon$, la série définit une fonction holomorphe de $x$ et de $y$ pour $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{3}$.*

Ce théorème s'étend immédiatement au cas où $x$ et $y$, au lieu de rester réels, gardent des arguments fixes et au cas d'une série de même nature à un nombre quelconque de variables.

Nous avons donc étendu au cas actuel le théorème obtenu dans le cas d'un centre par M. Poincaré et généralisé par M. Bendixson.

*Nous obtenons, comme dans le cas d'un centre, une intégrale générale*

$$H(x, y) = \text{const.},$$

*$H(x, y)$ étant, comme dans le cas cité, un développement qu'on peut ordonner en série de polynomes en $x$ et en $y$.*

*On conclut sans peine de là que, dans le cas actuel, il n'y a pas*

*d'autres intégrales que les intégrales holomorphes pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro.*

**58.** Montrons que, si les conditions pour qu'on puisse déterminer $h(x, y)$ ne sont pas satisfaites, il y aura une infinité de caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendront simultanément vers zéro. Ces caractéristiques ne seront pas des caractéristiques fournies par les intégrales holomorphes. La démonstration qui va suivre serait valable quelles que soient les quantités $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$; mais nous n'en aurons besoin que dans le cas où les rapports de toutes ces quantités sont positifs; la démonstration est déjà faite dans les autres cas.

Nous supposons qu'en cherchant à déterminer

$$h(x, y) = 1 + h_1(x, y) + h_2(x, y) + \ldots,$$

$h_q$ étant un polynome homogène de degré $q$, on puisse déterminer $h_1$, $h_2, \ldots, h_s$, mais qu'on soit arrêté par une impossibilité dans la détermination de $h_{s+1}$.

L'équation aux dérivées partielles à laquelle on est conduit pour déterminer les termes de $h$ et obtenue paragraphe 50 (équation (21)) se déduit de l'équation (36) en remplaçant $L(v, x, y)$ par $v^\alpha e^{h(x,y)}$. Par suite, si l'on fait le changement de variables (30), qui substitue à $x$ et $y$ les variables $\rho$ et $t$; $h(x, y)$ deviendra $k(\rho, t)$, $k$ satisfaisant à l'équation

$$(38) \qquad \frac{\partial k}{\partial t} = \rho^2 \varphi(\rho, t) \frac{\partial k}{\partial \rho} + \rho \psi(\rho, t).$$

Nous voyons que si nous cherchons à déterminer $k$ mis sous la forme

$$(39) \qquad k(\rho, t) = 1 + k_1(t)\rho + k_2(t)\rho^2 + \ldots + k_i(t)\rho^i + \ldots,$$

on pourra, pour $i$ inférieur ou égal à $s$, prendre

$$k_i(t) = \frac{h_i(t, 1)}{i}.$$

Comme nous avons

$$\frac{du}{dt} = \frac{u\,\rho_{n-1}(t)}{(1 - a_1 t)(1 - a_2 t)\dots(1 - a_n t)},$$

$\rho_{n-1}$ étant un polynome de degré $n - 1$, nous aurons

$$k_i(t) = \frac{dh_i}{dt} = \frac{\rho_{i+n-1}(t)}{(1 - a_1 t)(1 - a_2 t)\dots(1 - a_n t)}. \tag{40}$$

Le numérateur étant un polynome en $t$ de degré $i + n - 1$.

D'autre part l'équation (38) nous donnera

$$k_i(t) = \alpha_i(t).$$

$\alpha_i(t)$ étant connu dès que $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$ sont connus.

En comparant les deux égalités nous avons la forme des $\alpha_i(t)$ pour $i \leq s$. Cette forme est encore la même pour $i = s + 1$. On peut le voir en remarquant d'abord que $\alpha_{s+1}(t)$ est une fonction linéaire des coefficients des termes de degré $s + 1$ par rapport à $\rho$ de $\rho'_1(\rho, t)$ et $\rho_2(\rho, t)$, qui eux-mêmes dépendent linéairement des coefficients des termes de degré $n + s + 1$ de $X(x, y)$ et $Y(x, y)$. Or, si l'on donne à ces coefficients de X et de Y des valeurs convenables, on pourra déterminer un polynome $h_{s+1}(x, y)$; par suite $\alpha_{s+1}(t)$ sera de la forme (40). Or la valeur donnée à ces coefficients ne changera pas la forme de $\alpha_{s+1}(t)$.

Nous avons donc pour $k_1, k_2, \dots, k_s$ des fonctions uniformes de $t$ et de $u$; $u$ étant lié à $t$ par la relation

$$u = (1 - a_1 t)^{l_1}(1 - a_2 t)^{l_2}\dots(1 - a_n t)^{l_n}.$$

Montrons qu'il n'en est plus de même pour $k_{s+1}$.

On a

$$k_{s+1}(t) = c - \int_0^t \frac{\rho_{n+s}(t)\,dt}{(1 - a_1 t)\dots(1 - a_n t)} \quad \text{ou} \quad k_{s+1}(t) = c + I,$$

$c$ étant une constante arbitraire. Je dis que I et, par suite, $k_{s+1}(t)$ est une fonction périodique de $t$ et $u^{s+1}$. Lorsque $t$ décrit certains contours partant de l'origine et aboutissant à l'origine, $u^{s+1}$ reprend la même valeur et I ne reprend pas la valeur zéro. Pour le démontrer, je vais montrer que, s'il n'existe pas de pareil contour, on pourra prendre

$$h_{s+1}(t) = \frac{P_{s+1}(t)}{u}.$$

$P_{s+1}(t)$ étant un polynome de degré $s+1$ et, par suite, déterminer pour $h_{s+1}(x, y)$ un polynome se déduisant de $P_{s+1}$ en remplaçant $t$ par $\frac{x}{y}$ et multipliant par $y^{s+1}$.

La démonstration de ce fait résulte immédiatement des propriétés des fonctions algébriques, dans le cas où les rapports de tous les exposants $\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n$ sont rationnels. En effet, si I n'est pas une fonction périodique et ne présente pas de point logarithmique, le produit $u^{-1}$I est une fonction uniforme de $t$ et de $u^{s+1}$, qui n'aura d'autre pôle que $t = \infty$, qui sera un pôle d'ordre égal à $s+1$; on aura donc

$$u^{s+1}\mathrm{I} = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{s+1} t^{s+1} + c' u^{s+1};$$

en prenant $c = -c'$ on aura bien pour $k^{s+1}$ la forme indiquée.

Le raisonnement est en défaut si I présente un point logarithmique; cette circonstance ne peut se produire que si le produit d'un des $\lambda$, de $\lambda_1$ par exemple, par $s+1$ est un entier; dans ce cas $u^{s+1}$ ne change pas de valeur lorsqu'on décrit un lacet entourant le point $\frac{1}{\alpha_1}$, tandis que I augmente d'une période logarithmique. Ce cas ne peut donc se présenter si l'on suppose I non périodique.

Pour faire la démonstration dans le cas général, établissons d'abord certaines relations nécessaires pour que I ne soit pas une fonction périodique. Nous désignerons par $h_j$ un lacet partant de $t = 0$ et entourant le point $\frac{1}{\alpha_j}$. Lorsqu'on décrit ce lacet, $u^{s+1}$ est multiplié par $e^{\frac{2\pi i}{\lambda_j}}$, quan-

tité que nous désignerons par $\frac{1}{\gamma_j}\cdot B_j$ désignera la valeur que prend I, lorsqu'on part de $t = 0$, avec la valeur $I = 0$ et qu'on décrit, dans le sens direct, le lacet $B_j$; $B'_j$ désignera la valeur I lorsqu'on décrit le lacet $b_j$ dans le sens inverse en partant toujours de $t = 0$. Nous obtenons immédiatement la relation

$$(11) \qquad B_j + \gamma_j B'_j = 0,$$

en décrivant le lacet $b_j$ successivement dans le sens direct et en sens inverse. Ceci posé, considérons un contour C formé du lacet $b_0$ et du lacet $b_1$ décrits successivement dans le sens direct et des lacets $b_0$ et $b_1$ décrits ensuite successivement en sens inverse. Lorsque $t$ aura décrit C $u$ aura repris la même valeur; donc si I n'est pas une fonction périodique, on aura

$$B_0 + \gamma_0 B_1 + \gamma_0 \gamma_1 B'_0 + \gamma_1 B'_1 = 0$$

ou, en tenant compte de (4),

$$B_0(1 - \gamma_1) - B_1(1 - \gamma_0) = 0.$$

Si I n'est pas périodique, on aura donc

$$\frac{B_0}{1 - \gamma_0} = \frac{B_1}{1 - \gamma_1} = \ldots = \frac{B_n}{1 - \gamma_n} = d,$$

$d$ étant une certaine constante. Si nous considérons le produit $u^{\gamma_j - 1}(I - d)$, ce produit est égal à $-d$ pour $t = 0$, si l'on part de $t = 0$ avec la valeur $u_n$ pour $u$ et il devient $\frac{1}{\gamma_j}[d(1 - \gamma_j) - d] = -d$, après qu'on a décrit dans le sens direct le lacet $b_j$. Ce produit n'admet donc pas $t = \frac{1}{\alpha_j}$, comme point critique; $j$ pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, n$, le produit est une fonction uniforme de $t$, qui n'a d'autre pôle que $t = \infty$, pôle

d'ordre $s+1$. On a

$$u^{s+1}(1-d) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{s-1} t^{s-1},$$

d'où, en prenant $c = -d$, il résulte que $h_{s+1}$ a bien la forme indiquée. Nous concluons donc qu'il existe au moins un contour fermé C, tel que $u$ reprenne la même valeur et que $k_{s+1}(t)$ augmente d'une période lorsque $t$ décrit ce contour.

Nous venons de voir que, si l'on cherche à obtenir une intégrale générale de l'équation différentielle sous la forme $v^{\nu} e^{k(\rho, t)} = \text{const.}$, $k$ étant pris sous la forme (39), on peut prendre pour $k_1, k_2, \ldots, k_s$ des fonctions uniformes de $t$; $k_{s+1}(t)$ sera une fonction périodique. Il en résulte, en se reportant à l'expression de $v$, que, si l'on cherche à déterminer l'intégrale générale sous la forme

$$(12) \qquad \rho + \rho^2 f_1(t) + \rho^3 f_2(t) + \ldots + \rho^{s+1} f_s(t) = \text{const.},$$

on trouvera pour $f_1, f_2, \ldots, f_s$ des fonctions uniformes de $t$ et de $u$ et pour $f_{s+1}$ une fonction périodique, dont l'expression sera de la forme

$$(13) \qquad f_{s+1}(t) = c k_{s+1}(t) + l(t),$$

$c$ étant une constante et $l(t)$ une fonction uniforme de $t$ et de $u$. Faisons le changement de variable

$$(14) \qquad z = \rho + \rho^2 f_1(t) + \rho^3 f_2(t) + \ldots + \rho^{s+1} f_s(t).$$

Nous n'emploierons ce changement que pour $t$ compris dans le domaine D et $\rho$ suffisamment petit. L'équation différentielle en $z$ et $t$ sera

$$\frac{dz}{dt} = z^2 \alpha_1(t) + z^3 \alpha_2(t) + \ldots,$$

les coefficients $\alpha(t)$ des diverses puissances de $z$ étant des fonctions uni-

formes de $t$ et $u$. Si l'on cherche pour cette équation une intégrale générale de la forme

$$G(z, t) = z + z^2 g_1(t) + z^3 g_2(t) + \ldots + z^{s+2} g_{s+1}(t) + \ldots = \text{const.}$$

on voit, en comparant l'intégrale (12) et le changement de variable (11), qu'on pourra prendre

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_s = 0,$$

et que $g_{s+1}(t)$ sera une fonction périodique qui aura une expression analogue à $f_{s+1}(t)$ donné par (13).

D'autre part, $G(z, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z}\left[z^2 \alpha_1(t) + z^3 \alpha_2(t) + \ldots\right] = 0.$$

On aura

$$g_1'(t) + \alpha_1(t) = 0,$$

donc on a : $\alpha_1(t) \equiv 0$. On montrera de même de proche en proche que l'on a

$$\alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \ldots = \alpha_s(t) = 0.$$

L'équation se réduira à

$$\frac{dz}{dt} = z^{s+2} \alpha_{s+1}(t) + z^{s+3} \alpha_{s+2}(t) + \ldots,$$

et, comme on a

$$g_{s+1}'(t) + \alpha_{s+1}(t) = 0,$$

$\alpha_{s+1}(t)$ sera une fonction uniforme de $t$ et de $u$ dont l'intégration donnera naissance à une fonction périodique, lorsqu'on intègre suivant un certain contour fermé C partant de l'origine. La forme de ce contour étant fixée, désignons par $l$ sa longueur, désignons par $\sigma$ la longueur d'un

arc de courbe de ce contour, comptée à partir de l'origine, $\sigma$ pouvant avoir un signe, selon le sens dans lequel est décrit le contour. Nous pouvons considérer $t$ comme une fonction de $\sigma$ définie par la forme du contour. Si l'on parcourt une infinité de fois de suite, dans le même sens, ce contour, $\sigma$ croîtra indéfiniment; nous allons montrer que, dans ces conditions, $z$ tend vers zéro; il en résultera que $\rho$ et, par suite, $x$ et $y$ tendent vers zéro, d'après les expressions (31) (p. 109).

$\int_0^t \alpha_{s+1}(t)\,dt$ devient une fonction de $\sigma$, qui, lorsque $\sigma$ augmente de $l$, se reproduit augmentée de la période $\omega$. Soient $g(\sigma)$ cette fonction et $g'(\sigma)$ sa dérivée.

L'équation différentielle devient

$$\frac{dz}{d\sigma} = g'(\sigma)\,z^{s+2} + l_1(\sigma)\,z^{s+3} + \ldots.$$

Posons

$$z^{s+1} = -(s+1)\left[g(\sigma) - \frac{\omega}{l}\sigma\right] + \frac{1}{r^{s+1}},$$

$r$ étant une nouvelle variable. On tire de là

$$z^{s+1} = \frac{r^{s+1}}{1 - (s+1)\,r^{s+1}\left[g(\sigma) - \frac{\omega}{l}\sigma\right]}.$$

Le changement de variable défini par cette formule, ainsi que le changement inverse, sont valables pour $|r|$ ou $|z|$ suffisamment petits, parce que $g(\sigma) - \frac{\omega}{l}\sigma$ est une fonction dont le module reste compris entre des limites fixes, lorsque $\sigma$ croît indéfiniment. En faisant ce changement de variable l'équation différentielle devient

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\omega}{l}r^{s+2} + m_1(\sigma)\,z^{s+3} + m_2(\sigma)\,z^{s+4} + \ldots,$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\omega}{l}r^{s+2}\left[1 + \gamma_1(r, \sigma)\right].$$

$\gamma(r, \sigma)$ étant aussi petit que l'on veut quel que soit $\sigma$, pour $r$ suffisamment petit. On peut appliquer à cette équation le raisonnement tout à fait analogue à celui du paragraphe **25**. Au reste, en posant

$$s + 1 \quad r^{s+1} = \frac{dl}{\rho}\rho^2, \qquad \rho = \mathrm{R}e^{i(\theta + \sigma)}, \qquad \gamma(r, \sigma) = \alpha + i\beta$$

et séparant la partie réelle de la partie imaginaire, on obtient

$$d\mathrm{R} = \mathrm{R}^3 [1 + \alpha \cos\theta - \beta \sin\theta] d\sigma,$$
$$d\theta = \alpha \mathrm{R}^2 [\beta \cos\theta + (1 + \alpha) \sin\theta] d\sigma,$$

qui ne diffèrent des équations du paragraphe **25** que parce que les variables réelles $r$ et $t$ sont remplacées par les variables réelles R et $\sigma$. A chaque valeur initiale de R correspondra une caractéristique pour laquelle $x$ et $y$ tendront vers zéro. Ces caractéristiques ne seront pas algébroïdes, parce que $\frac{x}{y} = t$ ne tend vers aucune limite. Nous avons donc le théorème suivant :

*Si $h(x, y)$ ne peut être déterminé, l'équation admet une infinité de caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent simultanément vers zéro. Ces caractéristiques ne sont pas fournies par les intégrales algébroïdes.*

**39.** En rapprochant les résultats qui viennent d'être obtenus de ceux obtenus au paragraphe **47**, on voit que, *sauf dans le cas où tous les exposants $\lambda$ ont leurs rapports positifs et où $h(x, y)$ peut être déterminé, l'équation* (1) *admet toujours une infinité de caractéristiques pour lesquelles $x$ et $y$ tendent vers zéro.*

*Le cas où les rapports des $\lambda$ sont tous positifs et où $h(x, y)$ peut être déterminé se subdivise en deux cas :*

1° *Les rapports des $\lambda$ sont tous rationnels. Il n'y a pas d'autres caractéristiques passant par l'origine que celles fournies par les $n + 1$ intégrales normales.*

2° *Les rapports des $\lambda$ ne sont pas tous rationnels. Je ne puis affirmer s'il y a ou non d'autres caractéristiques que celles fournies par les intégrales normales.*

Ces conclusions sont donc les mêmes que lorsque le point singulier est un point simple d'intersection des courbes $X = 0$, $Y = 0$.

# DEUXIÈME THÈSE.

## PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie des tourbillons.

*Vu et approuvé*

Paris, le [illegible]

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer.*

Paris, le [illegible]

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

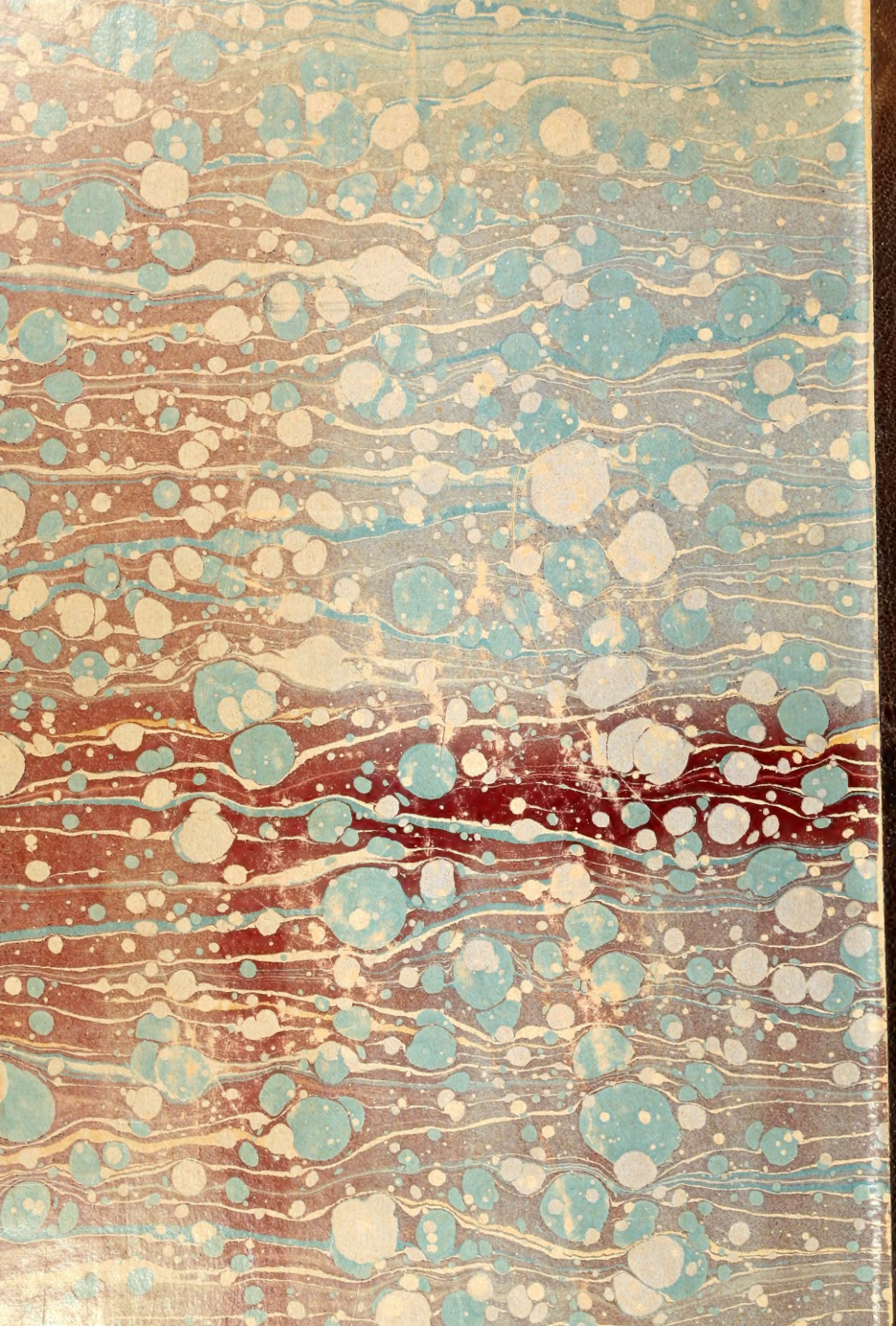
L. LIARD.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
371
D85

Dulac, Henry
Recherches sur les points singuliers des équations différentielles.

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY